Løsning av ligninger.

Kap. 10 i Komp.

Vi skal finne x slik at $f(x)=0$.

Hva vil det si å løse $f(x)=0$?

i) Balansere begge sider inntil vi får $x= \dots$
Dette er langt fra alltid mulig.

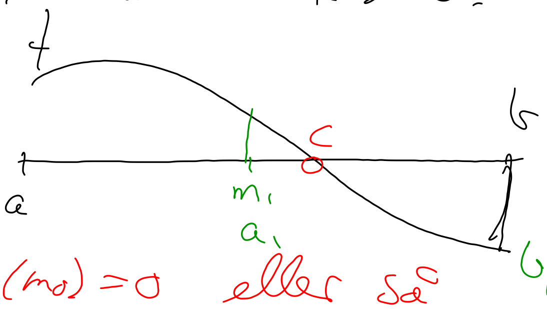
ii) Finne en algoritme som kan regne ut en vilkårlig god tilnærming til løsningen.

Halveringsmetoden.

Skjæringssetningen. Hvis f er en kont. funksjon definert på $[a,b]$ og $f(a)f(b)<0$ så fins det $c \in (a,b)$ slik at $f(c)=0$.

Vi gjetter på midtpunktet

$$m_0 = \frac{a+b}{2}.$$



Så sjekker vi fortegnet på $f(m_0)$. Enten et $f(m_0)=0$ eller så har f motsatt fortegn i endene til $[a, m_0]$ eller $[m_0, b]$.

Altså kan vi fortsette med et intervall som er halvparten så bredt.

Algoritme

$a_0 = a$; $b_0 = b$;

for $i = 1, 2, \ldots, N$

$\quad m_{i-1} = (a_{i-1} + b_{i-1})/2$

$\quad$ if $f(m_{i-1}) == 0$

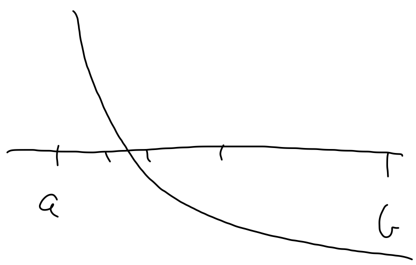
$\quad\quad a_i = b_i = m_{i-1}$

$\quad$ if $f(a_{i-1})\, f(m_{i-1}) < 0$

$\quad\quad a_i = a_{i-1}$; $b_i = m_{i-1}$

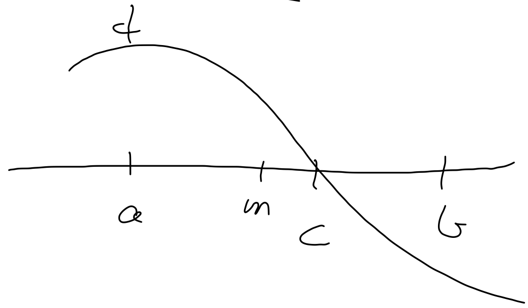
$\quad$ else

$\quad\quad a_i = m_{i-1}$; $b_i = b_{i-1}$



$m_N = (a_N + b_N)/2$

Feil i halveringsmetoden.



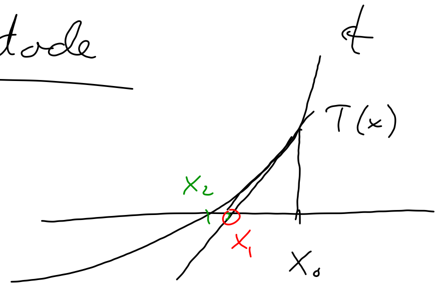
Hvis vi lar m være en tilnærming til nullpunktet er

$$|m - c| \leq \frac{b-a}{2}$$

Etter N halveringer er feilen begrenset av

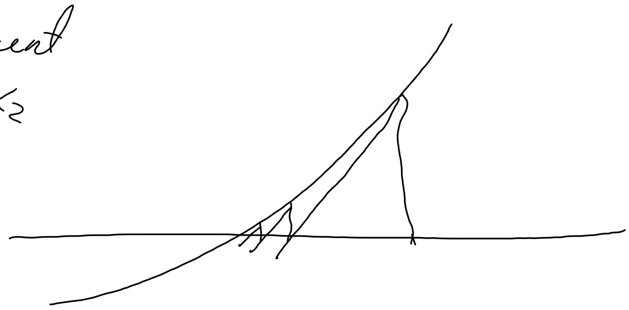
$$|c - m_N| \leq \frac{b-a}{2^N}$$

Newtons metode

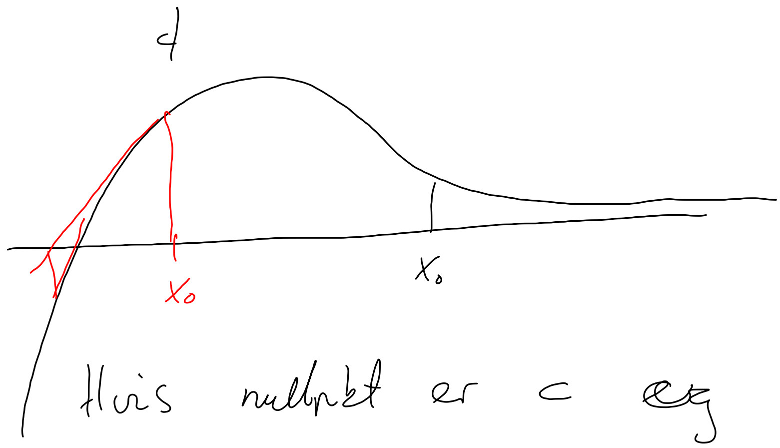


Grunnleggende ide:

Velg et punkt x_0. Finn tangenten i x_0 og dens nullpkt. x_1. Finn ny tangent i x_1 og dens nullpunkt x_2 etc.



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,2,\ldots$$



Hvis nullpkt er c og vi setter

$e_k = |c - x_k|$ så er $\boxed{e_{n+1} \le D\, e_n^2}$, $n=0,1,\ldots$

Dette betyr at antall siffer dobles ved hver iterasjon. Hvis det konvergerer og $f'(c) \neq 0$.

Alternativ: Bruk sekant i stedet for tangent. Må ha to startverdier.

Da vil $e_{n+1} \le D_s\, e_n^r$, $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$