UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 4. Desember 2020.
Tid for eksamen:	11:00 – 15:30.
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Alle.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenen består av to deler: flervalgsoppgaver (totalt 30 poeng) og tradisjonelle oppgaver (totalt 70 poeng).

Del 1: Flervalgsoppgaver

Denne delen består av 5 flervalgsoppgaver som teller 6 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Du vil få to poeng for å markere riktig svaralternativ, og inntil fire poeng for begrunnelse ved regning av hvordan du kommer fram til svaret.

Oppgave 1. Hva er Taylor-polynomet av grad 1 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \sin(\sin x)$?

A: x.

B: $\cos(1)x$.

C: $\sin(1)x$.

D: 0.

E: $\sin(1)\cos(1)x$.

Svar: Vi har at $f'(x) = \cos(\sin x)\cos x$. Vi får dermed $f(0) = 0$ og $f'(0) = 1$, slik at Taylorrekka blir $T_1 f(x) = x$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2. Løsningen av differensialligningen

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

er gitt ved

A: $y(x) = e^{2x}$

B: $y(x) = e^{2x} - xe^{2x}$

C: $y(x) = e^{2x} + xe^{2x}$

D: $y(x) = xe^{2x}$

E: $y(x) = 2e^{2x} - 2xe^{2x}$

Svar: Den karakteristiske ligningen blir $r^2 - 4r + 4 = 0$, som har $r = 2$ som en dobbeltrot. Den generelle løsningen blir dermed $y(x) = Ce^{2x} + Dxe^{2x}$. Da er $y'(x) = 2Ce^{2x} + D(2x + 1)e^{2x}$, og initialverdiene gir ligningene

$$\begin{aligned} C &= 1 \\ 2C + D &= 1, \end{aligned}$$

som gir at $C = 1$ og $D = -1$. Løsningen blir dermed $y(x) = e^{2x} - xe^{2x}$.

Oppgave 3. En løsning av differensialligningen $x^2y'y^2 = 2x$ er

A: $y(x) = (6 \ln x)^{1/3}$

B: $y(x) = \ln x$

C: $y(x) = (6 \ln x)^{1/2}$

D: $y(x) = 3x^{1/3}$

E: $y(x) = (\ln x)^{1/3}$

Svar: Vi omskriver ligningen til $y^2y' = 2/x$. Integrerer vi begge sider får vi $\frac{1}{3}y^3 = 2 \ln |x| + C$, slik at

$$y(x) = (6 \ln |x| + D)^{1/3}.$$

Med $D = 0$ ser vi at dette faller sammen med det første alternativet.

Oppgave 4. Vi bruker sekantmetoden med startverdier $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$ til å finne ett av nullpunktene til funksjonen $f(x) = x^2 - 2$. I første iterasjon får vi da at x_3 blir

A: $\sqrt{2}$

B: 1.9

C: 1.5

D: 4/3

E: 5/4

Svar: Vi regner først ut at $f(x_1) = f(1) = -1$, og $f(x_2) = f(2) = 2$. Vi får så at

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_2) = 2 - \frac{2 - 1}{2 - (-1)} 2 = 2 - 2/3 = 4/3.$$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5. Hvis vi bruker trapesmetoden med 4 intervaller til å regne ut

$$\int_0^2 e^{x^2}\,dx$$

får vi tilnærmingen

A: 19.5401

B: 19.5623

C: 19.7365

D: 20.3088

E: 20.6446

Svar: Med $f(x) = e^{x^2}$ får vi

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,dx &\approx \frac{1}{2}\left(\frac{f(0)+f(2)}{2} + f(1/2) + f(1) + f(3/2)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+e^4}{2} + e^{1/4} + e + e^{9/4}\right) \approx 20.6446.\end{aligned}$$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Denne delen består av 7 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller 10 poeng. Du må begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige.

Oppgave 1. I denne oppgaven skal vi studere funksjonen $f(x) = xe^x$.

a) Vis ved induksjon at $f^{(k)}(x) = (x + k)e^x$ for alle $k \geq 0$.
Svar: La P_k representere påstanden at $f^{(k)}(x) = (x + k)e^x$. P_0 er opplagt sann. Anta at P_n er sann for et vilkårlig valg av $n \geq 0$. Vi har da at

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = ((x + n)e^x)' = e^x + (x + n)e^x = (x + (n + 1))e^x,$$

som viser at P_{n+1} også er sann.

b) Finn Taylor-polynomet $T_n(x)$ av grad n til f om $a = 0$ og restleddet $R_n(x)$. Finn en N slik at for alle $n \geq N$, og for alle x i intervallet $[0, 1]$, så vil feilen i $T_n(x)$ bli mindre enn 0.001.
Svar: Fra a) følger at $f^{(k)}(0) = k$, slik at Taylorrekken blir

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} x^k.$$

Vi har også at

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(c + n + 1)e^c}{(n+1)!} x^{n+1},$$

der c er et tall mellom 0 og x. Siden $(c + n + 1)e^c$ er voksende i c, så har vi for $x \in [0, 1]$ at

$$|R_n(x)| \leq \frac{(n+2)e}{(n+1)!}.$$

Skal dette være mindre enn 0.001 må vi ha at $\frac{(n+2)e}{(n+1)!} < 0.001$, eller $\frac{(n+1)!}{n+2} > 1000e$. Ved å regne ut dette for forskjellige n ser vi at $n = 7$ er minste slike verdi.

c) (Kun MAT-IN1105) Skriv en funksjon `T(x, n)` i Python som regner ut og returnerer $T_n(x)$ definert i b). Du kan bruke funksjonen `math.factorial(k)` til å regne ut $k!$.
Svar: Følgende kode kan brukes, som løser både deloppgave c) og d)

```
from math import *

def T(x, n):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        s += x**k/factorial(k-1)
    return s

def test_taylor():
    exact = exp(1)
    computed = T(1.,7)
```

(Fortsettes på side 5.)

```
    assert abs(computed - exact) <= 0.001 , 'error between exact and \
    computed value is %s' % (computed-exact)

if __name__ == '__main__':
    test_taylor()
```

d) (Kun MAT-IN1105) Skriv en testfunksjon som sjekker om din implementasjon av T_n er riktig. Du kan for eksempel kalle `T` med en n større enn N som du fant i b), og sjekke at avviket fra den eksakte verdien $f(1) = e$ er mindre enn 0.001. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*()`, og gjøre testen ved hjelp av en `assert`).

Oppgave 2. (Kun MAT-INF1100) Vi har gitt differensligningen

$$12x_{n+2} - 7x_{n+1} + x_n = 6, \quad x_0 = 0, \ x_1 = 2/3.$$

a) Vis at den generelle løsningen av ligningen er

$$x_n = 1 + C4^{-n} + D3^{-n}$$

der C og D er vilkårlige konstanter. Vis også at løsningen som tilfredstiller startverdiene er $x_n = 1 - 3^{-n}$.

Svar: Den karakteristiske ligningen er $12r^2 - 7r + 1 = 0$, som har røtter $r = \frac{7\pm\sqrt{49-48}}{24} = \frac{7\pm 1}{24}$, som gir $r_1 = 1/4$ og $r_2 = 1/3$. Den generelle løsningen av den homogene ligningen blir dermed $x_n^h = C4^{-n} + D3^{-n}$. For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = A$, og får da at $12A - 7A + A = 6A = 6$, slik at $A = 1$, slik at den generelle løsningen av ligningen er $x_n = 1 + C4^{-n} + D3^{-n}$. De to initialbetingelsene gir at

$$\begin{aligned} 1 + C + D &= 0 \\ 1 + C/4 + D/3 &= 2/3, \end{aligned}$$

som kan skrives

$$\begin{aligned} C + D &= -1 \\ 3C + 4D &= -4. \end{aligned}$$

Løser vi disse finner vi at $C = 0$ og $D = -1$, slik at $x_n = 1 - 3^{-n}$.

b) Anta at vi skal simulere ligningen på en datamaskin med 64-bits flyttall. Hvordan vil den beregnede løsningen oppføre seg for store verdier av n?

Svar: Den ene initialbetingelsen 2/3 kan ikke representeres eksakt på en datamaskin, så her blir det avrundingsfeil, slik at den beregnede løsningen vil bli på formen

$$1 - (1 + \epsilon_1)3^{-n} + \epsilon_2 4^{-n}.$$

Den beregnede løsningen vil derfor konvergere mot 1, akkurat som den eksakte løsningen.

Oppgave 3 MAT-INF1100. Oppgave 2 MAT-IN1105 Vi har gitt differensialligningen

$$x' = \sin(t + x), \quad x(0) = \pi/2.$$

(Fortsettes på side 6.)

a) Finn to tilnærmede løsninger til ligningen i $t = 0.1$ ved å ta et steg med Eulers metode og et steg med Eulers midtpunktmetode.
Svar: Med Eulers metode får vi at

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) = \pi/2 + 0.1\sin(\pi/2) = \pi/2 + 0.1 \approx 1.6708.$$

Med Euler midtpunktmetode får vi

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= x_0 + hf(t_0, x_0)/2 = \pi/2 + 0.05\sin(\pi/2) = \pi/2 + 0.05 \\ x_1 &= x_0 + hf(t_{1/2}, x_{1/2}) = \pi/2 + 0.1\sin(0.05 + \pi/2 + 0.05) \\ &= \pi/2 + 0.1\sin(0.1 + \pi/2) \approx 1.6703. \end{aligned}$$

b) Finn et uttrykk for $x''(t)$ ved å derivere begge sider av differensialligningen og regn fra dette ut $x''(0)$. Bruk dette til å finne en tilnærming til løsningen i $t = 0.1$ ved hjelp av det kvadratiske Taylor-polynomet. Finn også en verdi for h som garanterer at feilen i Eulers metode er mindre enn 0.0001.
Svar: Vi har at

$$\begin{aligned} x''(t) &= \cos(t + x)(1 + x'(t)) = \cos(t + x)(1 + \sin(t + x)) \\ &= \cos(t + x) + \cos(t + x)\sin(t + x) \\ &= \cos(t + x) + \frac{1}{2}\sin(2(t + x)), \end{aligned}$$

slik at $x''(0) = \cos(\pi/2) + \frac{1}{2}\sin(\pi) = 0$. Siden $x'(0) = \sin(\pi_2 + 0) = 1$ blir tilnærmingen til løsningen ved hjelp av det kvadratiske Taylorpolynomet dermed

$$x(t) \approx x(0) + x'(0)t + x''(0)t^2/2 = \pi/2 + t,$$

slik at tilnærmingen blir $\pi/2+0.1$ for $t = 0.1$, som er samme tilnærmingen vi fikk som i Eulers metode. Hadde vi brukt førsteordens Taylor med restledd ville vi fått (for en c mellom 0 og t)

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + x''(c)t^2/2.$$

Restleddet/feilen er her

$$R_2(t) = x''(c)t^2/2 = \left(\cos(c + x(c)) + \frac{1}{2}\sin(2(c + x(c)))\right)t^2/2,$$

der c er et tall mellom 0 og t. Siden sin og cos er mindre enn eller lik 1 i absoluttverdi, så er $|R_2(t)| \leq \left(1 + \frac{1}{2}\right)t^2/2 = \frac{3}{4}t^2$. For h krever vi derfor at $\frac{3}{4}h^2 < 10^{-4}$, som gir at $h < \frac{2}{\sqrt{3}} \times 10^{-2} \approx 0.0115$.
Oppgave 4 MAT-INF1100. **Oppgave 3 MAT-IN1105** Vi har datasettet

x	0	1	3
$f(x)$	1	0	2

Finn det kvadratiske interpolasjonspolynomet p som interpolerer disse verdiene og regn ut en tilnærming til den deriverte til f i $x = 1$ ved hjelp av tilnærmingen $f'(1) \approx p'(1)$.

(Fortsettes på side 7.)

Svar: Newtonformen til det interpolerende polynomet er $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1)$. Setter vi inn funksjonsverdiene får vi ligningene

$$\begin{aligned} 1 &= c_0 \\ 0 &= c_0 + c_1 \\ 2 &= c_0 + 3c_1 + 6c_2. \end{aligned}$$

$c_0 = 1$ følger fra den første ligningen. Fra den andre ligningen får vi at $c_1 = -1$, og fra den tredje ligningen følger at $c_2 = (2-1+3)/6 = 2/3$, slik at

$$p(x) = 1 - x + \frac{2}{3}x(x-1).$$

Vi får nå at $p'(x) = -1 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$, slik at tilnærmingen vår blir $p'(1) = \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$.

Lykke til!