Induksjonsbevis

Vi har ofte behov for å summere de n første naturlige tallene, men hva er $\sum_{i=1}^{n} i$? $(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$

Eks

$\sum_{i=1}^{1} = 1$, $\sum_{i=1}^{2} i = 1+2 = 3$, $\sum_{i=1}^{3} i = 1+2+3 = 6$

$\sum_{i=1}^{4} i = 1+2+3+4 = 10$

Det viser seg at $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, stemmer for $i = 1, 2, 3, 4$

Sett $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Da er $S(1) = 1$, $S(2) = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$

$S(3) = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$, $S(4) = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$

Vi har uendelig mange påstander

$P_n: \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Hvordan kan vi gjøre det ?

---

1 2 3 4 5 6 7 8 9 .. k k+1, --

Forslag til verifisering

$\sum_{i=1}^{1} i = 1$ $S(1) = 1$

$\sum_{i=1}^{2} i = 1+2 = 3$ $S(2) = 3$

$\sum_{i=1}^{3} i = \sum_{i=1}^{2} i + 3 = 3+3 = 6$ $S(3) = 6$

$\sum_{i=1}^{4} i = \sum_{i=1}^{3} i + 4 = 6+4 = 10$, $S(4) = 10$

Anta at vi fortsetter dette og finner at formelen stemmer for $n = k$.

Er da formelen også sann for $n = k+1$?

n: 1 ✓ 2 ✓ 3 ✓ 4 ✓ 5 ✓ 6 ✓ . . k ✓ k+1 ?

Altså, er $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$?

$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + k+1 = \frac{k(k+1)}{2} + k+1$

$= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = (k+1)\frac{1}{2}(k+2)$

Hvis formelen stemmer for $n = k$ vil den også stemme for $n = k+1$.

n: 1 2 3 4 5 6 7 - - k k+1 . . .

k=1 k=2 k=3 k=4

Generelt induksjonsbevis

Vi har mange utsagn P_n, $n = 1, 2, \ldots$

Ex $P_n: \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Vi gjør følgende :

i) Sjekk at P_1 er riktig

ii) Anta at P_k er riktig og bruk dette til å vise at P_{k+1} er riktig

Hvis begge steg lar seg gjennomføre er P_n riktig for $n = 1, 2, 3, \ldots$ (alle $n \in \mathbb{N}$)

Ex. Vis at $n(n^2+5)$ er delelig med 6 for alle naturlige tall n.

P_n: $n(n^2+5)$ er delelig med 6

i) Er P_1 sann ?

$n=1$ gir $1 \cdot (1^2+5) = 6$ som er delelig med 6.

OK !

ii) Anta at P_k er sann, vi må vise at P_{k+1} er sann.

P_k er sann: $k(k^2+5)$ er delelig med 6

Vise P_{k+1} : $(k+1)((k+1)^2+5)$ er delelig med 6.

Vi sjekker

$(k+1)((k+1)^2+5) = k((k+1)^2+5) + (k+1)^2+5$

$= k(k^2+2k+1+5) + (k+1)^2+5$

$= k(k^2+5) + k(2k+1) + (k+1)^2+5$

$= k(k^2+5) + 2k^2+k + k^2+2k+1+5$

$= k(k^2+5) + 3k^2+3k+6$

$= k(k^2+5) + 3k(k+1) + 6$ delelig med 6 ?

OK ved antagelse; OK siden k eller k+1 er partall; OK