Representasjon av reelle tall i $(0,1)$

Egenskap. Sifferene til et tall $a \in (0,1)$ gjentar seg hvis og bare hvis a er rasjonal.

Eks med gjentagende siffre.

La $a = 0.313131\ldots$

Hvordan vise at a er rasjonal?

$$= \frac{31}{100} + \frac{31}{10000} + \frac{31}{1000000} + \ldots$$

$$= 31 \cdot 10^{-2} + 31 \cdot 10^{-4} + 31 \cdot 10^{-6} + 31 \cdot 10^{-8} + \ldots$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} 31 \cdot 10^{-2i} = 31 \sum_{i=1}^{\infty} (10^{-2})^i$$

$$= 31 \cdot 10^{-2} \sum_{i=0}^{\infty} (10^{-2})^i \qquad \sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}, \ |a|<1$$

$$= \frac{31}{100} \cdot \frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{31}{100} \cdot \frac{1}{99/100} = \frac{31}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{31}{99}$$

Egenskap 2.

$a = b/c \in (0,1)$ kan representeres med et endelig antall siffer i β-systemet om alle primtallsfaktorer i c er faktorer i β.

$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5 = 2^{-1} = 0.1_2$

$\frac{3}{8} = 0.375 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2^{-2} + 2^{-3} = 0{,}011_2$

$\frac{1}{10} = \frac{1}{2 \cdot 5} = 0.00011001100110011001 1\ldots$