Løsning av differensialligninger
<u>ved formel</u> (Kalkulus, kap 10)

Eks på diff ligning $y'' - y' - 6y = 0$

$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0$

$y(x)$ ukjent funk.

Vi skal se på to klasser av slike ligninger idag:

(i) Førsteordens lineære ligninger

(ii) — " — separable ligninger

Førsteordens lineære ligninger.

Dette er ligninger på formen

$$y'(x) + f(x)\,y(x) = g(x) \qquad (*)$$

Løsningsmetode: La $F(x)$ være en antiderivert til $f(x)$, $F(x) = \int f(x)$, $F'(x) = f(x)$

Multipliser med $e^{F(x)}$ på begge sider av $(*)$

$$e^{F(x)} y'(x) + \underbrace{f(x)\, e^{F(x)} y(x)}_{\displaystyle \|\atop \displaystyle (e^{F(x)} y(x))'} = e^{F(x)} g(x)$$

Men da er

$$e^{F(x)} y(x) = \int e^{F(x)} g(x) \; + C$$

$$y(x) = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)} g(x) + C \right),$$

der C er en vilkårlig, reell konstant.

Eks. $y' + 2x\, y = x$, $F(x) = \int 2x = x^2$, $f(x) = 2x$

Multipliser med $e^{F(x)} = e^{x^2}$

$$e^{x^2} y' + 2x e^{x^2} y = e^{x^2} x$$

$$(e^{x^2} y)' = e^{x^2} \cdot x$$

$$e^{x^2} y = \int e^{x^2} \cdot x \, dx + C$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$y(x) = e^{-x^2}\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C\right) = \frac{1}{2} + C e^{-x^2}$$

Hvis $y(0) = 1$ får vi

$$1 = y(0) = \frac{1}{2} + C \cdot 1 \,, \quad C = 1 - \tfrac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Så endelig løsninger

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

Ex. $y' + \frac{1}{x} y = \sin x \quad , \quad x > 0$

$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad F(x) = \ln x \quad , \quad e^{F(x)+c} = e^{\ln x + c} = x \cdot e^{c}$

Multipliser med $x = e^{F(x)}$

$$x y' e^{c} + y e^{c} = x \sin x \, e^{c}$$

$$(xy)' = x \sin x$$

$$xy \overset{+C_1}{=} \int x \sin x + C = \qquad C - C_1$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

$$y(x) = -\cos x + \frac{1}{x} \sin x + \frac{\overset{C-C_1}{C}}{x}$$

Separable diff lign.

En førsteordens ligning kalles separabel hvis den kan skrives som

$$q(y)\cdot y' = P(x), \quad \text{der } q, P \text{ er funksjoner.}$$

Ex. $e^{-x} y' = 1 + y^2$, $(y' - e^x y^2 = e^x)$

Kan skrive om til

$q(y) = \frac{1}{1+y^2}$ $\quad \frac{y'}{1+y^2} = e^x$, $\quad P(x) = e^x$

På venstre side setter vi $u = y(x)$, $du = y'(x)\,dx$

$$\int \frac{y'(x)\,dx}{1+y^2(x)} = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u = \arctan y(x)$$

H.S. $\int e^x\,dx = e^x + C$

Derfor er $\arctan y(x) = e^x + C$

tan på begge sider

$$y(x) = \tan(e^x + C)$$

Generelt.

Ligningen er $\int q(y)\, y' = \int P(x)$

Hvis $\int q(y)\, y' = Q(y(x))$, $\int P(x) = R(x) + C$

$$Q(y(x)) = R(x) + C$$

Løs for $y(x)$.

Eks. $e^{-x} y \cdot y' = -1$

$$\int y \cdot y' = -\int e^x$$

$$\frac{1}{2} y^2 = -e^x + C$$

$$y^2 = 2(C - e^x)$$

$$y(x) = \pm\sqrt{2(C - e^x)}$$

$$= \pm\sqrt{D - 2e^x}$$

$\left(\pm\sqrt{2C - 2e^x} \right.$

$= \pm\sqrt{D - 2e^x}$

Hva om $y(0) = 4$, $4 = y(0) = \sqrt{D - 2e^0}$

$= \sqrt{D-2}$

$16 = D - 2$, $D = 18$

$$y(x) = \sqrt{18 - 2e^x}.$$

Vi må ha $18 - 2e^x \geq 0$

$$e^x \leq 9$$

$$x \leq \ln 9$$