Differensialligninger

1. Litt om feil i ulike metoder (numeriske)
2. Systemer av differensial ligninger.

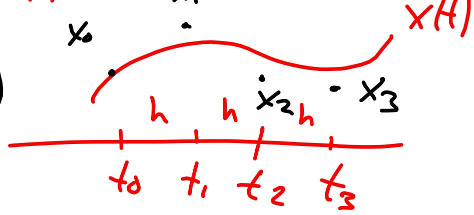
$x' = \sin(t+x)$

Eulers metode for $x' = f(t,x)$, $x(a) = x_0$

Anta at eksakt løsning er $x(t)$. Med Euler regner vi ut $x_k \approx x(t_k)$, $t_k = a + kh$, $k = 0,1,\dots$

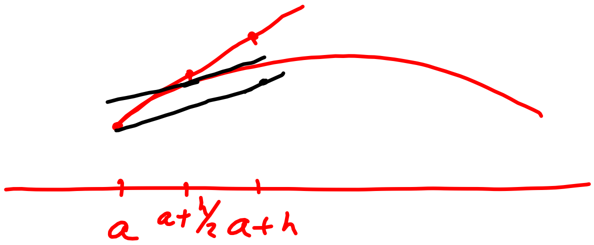
Feil $\boxed{e_k = |x(t_k) - x_k| \le C_1 h}$ $k = 0,1,\dots N$

(Euler er første ordens metode)



Euler midtpkt.

$$e^M_k \le C_2 h^2$$



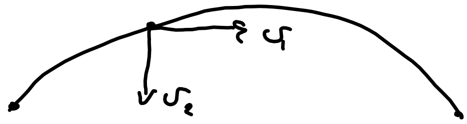
Runge Kutta av 4. orden

$$e^{RK}_k \le C_4 h^4$$

Det fins RK-metoder som bruker flere delsteg. Den neste bruker 5 delsteg. Men denne er ikke mer nøyaktig enn RK-4.

Systemer av differensialligninger.

Kast med ball:



Kan beskrives ved:

$$v_2' = \frac{c}{m} v_2^2 - g \quad , \quad v_2(0) = v_{0y}$$

$$v_1' = -\frac{c}{m} v_1^2 \qquad v_1(0) = v_{0x}$$

To differensialligninger som vi ønsker å løse samtidig.

Vi innfører vektornotasjon:

$$\bar{v} = (v_1, v_2) = (v_1(t), v_2(t))$$

$$v_1' = -\frac{c}{m} v_1^2 = f_1(t, v_1, v_2) = f_1(t, \bar{v})$$

$$v_2' = \frac{c}{m} v_2^2 - g = f_2(t, v_1, v_2) = f_2(t, \bar{v})$$

$$(v_1', v_2') = \bar{v}' = (f_1(t, \bar{v}), f_2(t, \bar{v})) = \bar{f}(t, \bar{v})$$

altså $\bar{v}' = \bar{f}(t, \bar{v})$ fint

Hvorfor er dette fint?

Jo, vi kan bruke Euler på dette systemet.

$$\bar{v}_{k+1} = \bar{v}_k + h \bar{f}(t_k, \bar{v}_k) \quad , \quad \bar{v}(0) = \bar{v}_0$$

Generelt skriver vi et system av ligninger som $\boxed{\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})}$

der $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_M)$

$$\bar{f}(t, \bar{x}) = (f_1(t, \bar{x}), f_2(t, \bar{x}), \dots, f_M(t, \bar{x}))$$

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + h \bar{f}(t_k, \bar{x}_k)$$

Andre ordens ligniger som et
<u>System av</u> førsteordens ligninger.

<u>Ex.</u> $x'' = t^2 + \sin(x + x')$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

Vi innfører en ny funksjon $\boxed{x_2(t) = x'(t)}$ $x_2' = x''$

Dessuten gir vi x nytt navn, $x_1 = x$

$$x'' = x_2' = t^2 + \sin(x + x') = t^2 + \sin(x_1 + x_2)$$

Dessuten $x' = x_1' = x_2$

Dermed:

$$x_1' = x_2 = f_1(t, x_1, x_2), \quad x_1(0) = 1$$
$$x_2' = t^2 + \sin(x_1 + x_2) = f_2(t, x_1, x_2), \quad x_2(0) = 0$$

$$\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x}), \quad \bar{x}(0) = (1, 0)$$

$$\bar{x} = (x_1, x_2), \quad \bar{f}(t, \bar{x}) = (x_2, t^2 + \sin(x_1 + x_2))$$