

Numerisk derivasjon

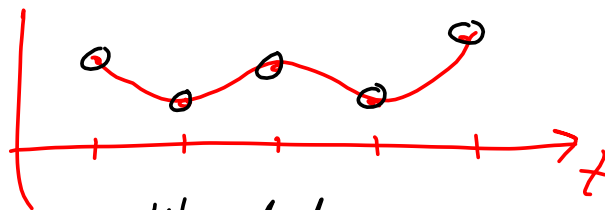
Vi har ofte behov for å regne ut numerisk tilnærminger til den deriverte

- Funksjonen er bare kjent i noen punkter
- Andre grænser

Vi skal utvikle noen

metoder for å derivere slike data.

Veldig nyttig å teste metodene på kjente funksjoner som f. eks. $f(x) = \sin x$.



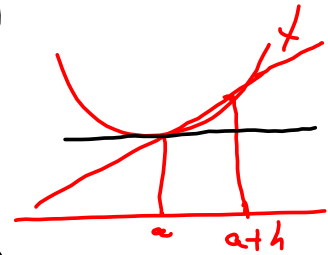
En enkel metode

Husk at for gitt f er den deriverte i a gitt ved

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Enkel metode

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad h > 0$$



Ex. $f(x) = \sin x$, $a = 0.5$, $f'(x) = \cos x$
 $f'(0.5) = \cos 0.5$

Trenkerings feil

Vi skal forsøke å finne et uttrykk for feilen og bruke Taylor med restledd.

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (a, a+h)$$

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

$$f'(a) = \frac{1}{h} (f(a+h) - f(a)) - \frac{h}{2} f''(\xi)$$

$$\left| f'(a) - \frac{1}{h} (f(a+h) - f(a)) \right| = \frac{h}{2} |f''(\xi)| \quad \text{feil} \quad \xi \in (a, a+h)$$

$$\left| f'(a) - \frac{1}{h} (f(a+h) - f(a)) \right| \approx \frac{h}{2} |f''(a)|$$

$$\left| f'(a) - \frac{1}{h} (f(a+h) - f(a)) \right| = \frac{h}{2} |f''(\xi)|$$

$$\leq \frac{h}{2} \max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)|$$

Mer nøyaktige metoder.

Oppskrift for å lage derivasjonsmetoder

1. Interpoler f i noen punkter (eks. $a, a+h$) med et polynom P .
2. Tilnær den deriverte til f i a med den deriverte til P i a .
 $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ eller $a-h, a, a+h$
3. Utleid feil estimat
 $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$