Oppg. 2.3. b, ex 2018

Den gen løsningen til

$9x_{n+2} - 15x_{n+1} + 4x_n = 0$

er $x_n = C(1/3)^n + D(4/3)^n$.

Vi ~~har~~ $x_0 = 1$. For hvilke verdier av x_1 vil vi kunne få stor relativ feil ved simulering?

Merk at $(4/3)^n$ vil dominere $(1/3)^n$ for store n.

Dermed vil løsningen vokse over alle grenser om $D \neq 0$

Hvis D skal vere null så ser vi at vi får avrundingsfeil ved simulering uansett. Dermed blir ikke D nøyaktig 0, men $\varepsilon \neq 0$. Da blir simulert løsn

$$x_n = (C + \varepsilon_1)(1/2)^n + \varepsilon_2 (4/3)^n$$

Hvis $x_1 = 1/2$ vil absolutt verdi for D vere 0_F da vil vi få stor avrundingsfeil.

2.16 Prøveeksamen

Finn Taylorpol. av grad n om $a=0$ for $f(x)=(x+0)e^x$.

Fra a) vet vi $f^{(k)}(x)=(x+k)e^x$

$$f^{(k)}(0)=k\cdot e^0=k \qquad a=0$$

$$T_n f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\cdot k=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{(k-1)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{(k-1)!}$$

Merk at når $k=0$ gir ikke $\frac{x^k}{(k-1)!}$ mening. $f(0)=0$

Vi skal finne N slik at for $n \geq N$ så blir feilen ≤ 0.001.

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad c \in (0, x) \quad (a, x)$$

$$= \frac{(c+n+1)e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Legg merke til at $(c+n+1)e^c$ vokser med c.

Det betyr at det blir størst når c er størst, det vil si $c = 1$ (siden x kan bli 1).

$$|R_{n+1}f(x)| = \left| \frac{(c+n+1)e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \right|$$

$$\leq \frac{(1+n+1)e^1}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

$$= \frac{e(n+2)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

størst når $x=1$ siden $x \in [0,1]$

$$\leq \frac{e(n+2)}{(n+1)!} \leq 0.001$$

ønske

Prøving og feiling gir $n=7$ som minste verdi.

Eksamen 2012, oppg. 1.5.

Vi ser på $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

For $f(x) = x^3$ blir tilnærm.

lik ...

$f'(x) = 3x^2$, $f'(a) = 3a^2$

$$f(a+h) = (a+h)^3$$
$$= a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$$

$$f(a-h) = (a-h)^3$$
$$= a^3 - 3a^2h + 3ah^2 - h^3$$

$$f(a+h) - f(a-h)$$
$$= 6a^2h + 2h^3$$

$$\left| f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \right|$$

$$= \left| 3a^2 - \frac{6a^2 h + 2h^3}{2h} \right|$$

$$= \left| 3a^2 - 3a^2 - h^2 \right|$$

$$= \left| -h^2 \right| = h^2$$

Oppg. 1.7, ex 2015.

Vi bruker halveringsmetoden

på $f(x) = (x-1)(x-\frac{1}{2})(x-2)$

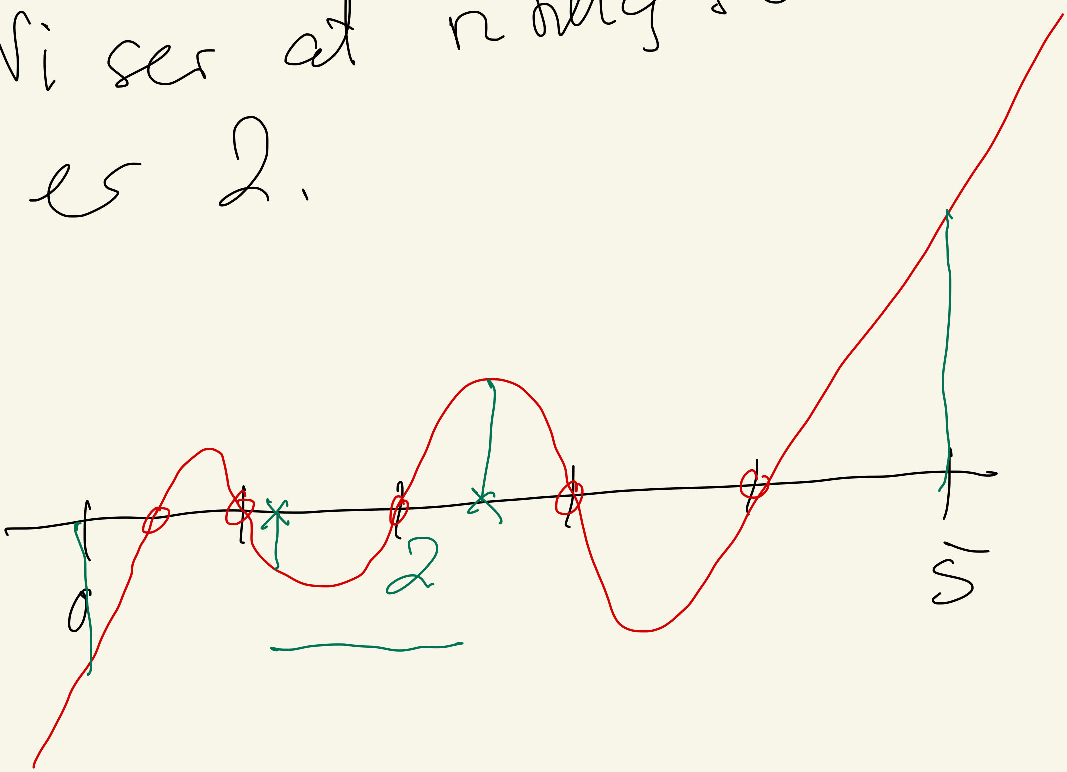
$\cdot (x-3)(x-4)$

på int. $[0,5]$. Metoden

vil da konv. mot.

Vi ser at riktig svar

er 2.



Oppg 1.8, ex 2017.

Tilnærmingen

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

er eksakt for

$\longmapsto$ 1

Husk at metoden er basert på interpolasjon med parabel i $a-h$, a, $a+h$. Dette er eksakt om f er et polynom av grad 2.

Eller: Prøv med

$f(x) = 1, \; x, \; x^2, \; x^3$

Finn $P_2(x) = c_0 + c_1(x-(a-h))$
$+ c_2(x-(a-h))$
$(x-a)$

(Newtonformen).

Gitt punkter $(a-h, f(a-h))$,
$(a, f(a))$, $(a+h, f(a+h))$.

1. punkt.

$$f(a-h) = P_2(a-h) = c_0 + 0 + 0$$
$$c_0 = f(a-h)$$

2. punkt.

$$f(a) = P_2(a) = c_0 + c_1 \cdot h + 0$$
$$c_1 = \frac{f(a) - c_0}{h} = \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

Oversikt over feilestimater.

1. Num der.

a) $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, feil $\leq C h$

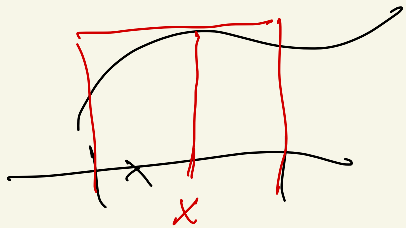
b) $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$, feil $\leq C h^2$

c) $f''(a) \approx \dfrac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$

feil $\leq C h$

Numerisk integrasjon.

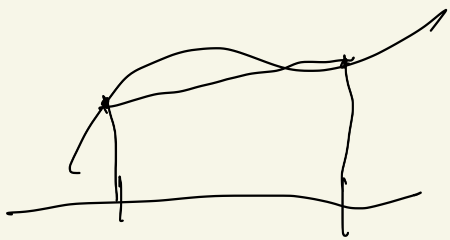
a) Midtpunkt form.



Global feil (mange delint. av bredde h).

feil $\leq C_1 \cdot h^2$

b) Trapesmetoden



feil $\leq C_2 \cdot h^2$

$C_1 < C_2$

c) Simpson

feil $\leq C_3 \cdot h^4$

Diff lign.

Euler : feil $\leq C \cdot h$

Euler midtpkt feil $\leq C \cdot h^2$

RK-4 feil $\leq C \cdot h^4$

Løsning av $f(x) = 0$.

i) Halveringsmetoden, Feil halveres hver gang

ii) Newton $e_{n+1} \leq C \cdot e_n^2$

iii) Sekant. $e_{n+1} \leq C \cdot e_n^r$

$r \approx 1.62$

For num der og int.

Viktig at C ikke avh. av h

Men må avhenge av

f, a, ..

For Newtons metode og sekantmetoden:

Viktig at C ikke avh. av h.

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

i) Prøv med $f(x) = 1$.

Da er $f'(a) = 0$

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1-1}{2h} = 0$$

ii) $f(x) = x$, $f'(x) = 1$, $f'(a) = 1$

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{a+h-a+h}{2h}$$

$$= 1$$

iii) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

$f'(a) = 2a$

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{(a+h)^2 - (a-h)^2}{2h}$$

$$= \frac{\cancel{a^2} + 2ah + \cancel{h^2} - (\cancel{a^2} - 2ah + \cancel{h^2})}{2h}$$

$$= \frac{4ah}{2h} = 2a$$

✓

iv) Prøv med $f(x) = x^3$, det går galt.