Differensialligninger, første ordens.

Eksempel 10.2.1. En dyrepopulasjon består av P dyr i dag. Populasjonen øker med vekstrate r. Hva er populasjonen etter tid t ?

Løsning: y(t) være populasjonen i tidspunkt t.

Vekstrate r betyr at på et lite tidsintervall Δt så øker populasjonen $y(t+\Delta t) - y(t) \approx r \cdot y(t) \cdot \Delta t$

Dele med Δt : $\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx r \cdot y(t)$

La $\Delta t \to 0 \Rightarrow y'(t) = r\,y(t)$.

Initialverdi : $y(0) = P$.

Lineær ligning : $y' - ry = 0$

Integrerende faktor Integrer $-r$: $-rt$

Faktor er e^{-rt} :

$$e^{-rt}y' - re^{-rt}y = 0 \Leftrightarrow (e^{-rt}y)' = 0$$

$\Rightarrow$ Integrer begge sider: $e^{-rt}y = C$, $\boxed{y(t) = Ce^{rt}} \Rightarrow \boxed{y(t) = Pe^{rt}}$

Eller bruk metoden for separable ligninger:

$$y' = ry \Rightarrow \frac{y'}{y} = r$$

Integrere $\frac{1}{y}$ med hensyn til y : $\ln|y|$:

$$(\ln|y|)' = r \Rightarrow \ln|y| = rt + C$$

y er positiv $\Rightarrow \ln y = rt + C \Rightarrow y = e^{rt} e^{C}$

$e^{C} = k$, $y = ke^{rt}$.

Eksempel . 10.4.4. "logistisk vekst"

Vekst av dyrepopulasjon men antar at N er grense på ressursene / mat i populasjonen :

$$y'(t) = r y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{N}\right). \qquad = ry - \frac{r}{N} y^2$$

r, N konstanter. Hvis $y(t)$ er liten, er $y'(t) \approx r y(t)$

Løsning Igjen separabel.

$$\Rightarrow \quad \int \frac{y'}{y\left(1-\frac{y}{N}\right)} dt = \int r \, dt = rt$$

Skifte variabler : $y' dt = dy$

$$\int \frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{N}\right)} = rt$$

$$\frac{1}{y\left(1-\frac{y}{N}\right)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-\frac{y}{N}} = \frac{1}{y} + \frac{1/N}{1-y/N} = \frac{1}{y} + \frac{1}{N-y}.$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y(1-\frac{y}{N})}\,dy = \ln|y| - \ln|N-y|. = \ln\left|\frac{y}{N-y}\right|$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{N-y}\right| = rt + C.$$

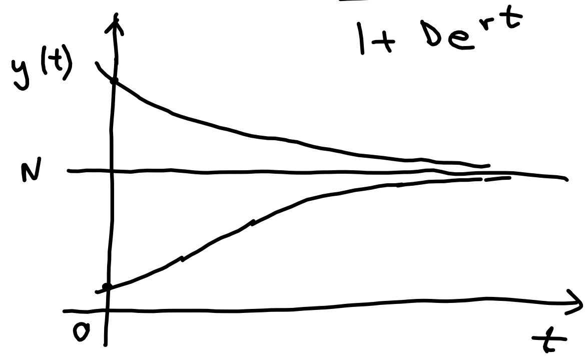
$$\Rightarrow \left|\frac{y}{N-y}\right| = e^{rt}e^{C} \Rightarrow \frac{y}{N-y} = De^{rt},$$

$(\text{hvor } D = \pm e^{C})$, $D \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow y = De^{rt}(N-y) \Rightarrow (1+De^{rt})y = DNe^{rt}$$

$$\Rightarrow y = \frac{DNe^{rt}}{1+De^{rt}} = \frac{N}{1+e^{-rt}/D}$$

(dividere med De^{rt})

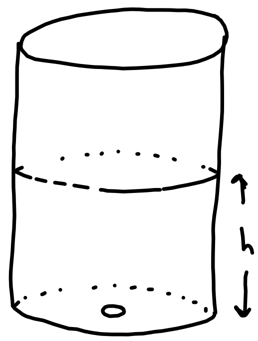


$y(t) = 0$

$y(t) = N$

Generaliseres:

$y'(t) = a(y-r_1)(y-r_2)(y-r_3)$



Eks. 10.4.5 Vann renner ut av et kar:

Torricellis lov: hastigheten til vannet er proporsjonal med kvadratroten av høyden til vannet. Anta at 3/4 av vannet har rennet ut i 10 minutter.

Hvor lang tid tar det før alt vannet har rennet ut?

Løsning: $v(t)$ = hastigheten til vannet

$h(t)$ = høyden

Torricelli: $\boxed{v(t) = k\sqrt{h(t)}}$. ①

La $y(t)$ være volumet av vannet.

Anta at karet har radius r. $\Rightarrow$ $\boxed{y(t) = r^2 \pi h(t)}$ ②

Anta at hullet har areal A.

På et lite tidsrom Δt renner det ut

$$y(t) - y(t+\Delta t) = A \cdot v(t) \cdot \Delta t$$

Dividerer med Δt, og la $\Delta t \to 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{-y'(t) = A\, v(t)}$.

$v = k\sqrt{h}$, $h = \frac{y}{r^2\pi}$ $\Rightarrow$ $v = \frac{k\sqrt{y}}{r\sqrt{\pi}}$.

$-y' = Av$ $\Rightarrow$ $-y' = \frac{Ak}{r\sqrt{\pi}}\sqrt{y}$.

$\Rightarrow$ $y' = -K\sqrt{y}$, $K = \frac{Ak}{r\sqrt{\pi}}$.

Diff. ligning. Den er separabel,

$\Rightarrow$ $\frac{y'}{\sqrt{y}} = -K$

$(2\sqrt{y})' = -K$

$\Rightarrow$ $2\sqrt{y} = -Kt + C$

$\Rightarrow$ $y = \left(-\frac{K}{2}t + D\right)^2$, $D = \frac{C}{2}$.

La V være volumet i $t=0$: $y(0) = V$

Da er $y(10) = V/4$.

$$\boxed{y = \left(-\frac{k}{2}t + D\right)^2} \qquad y(0) = V, \quad y(10) = V/4 \ :$$

$(t=0)$ $V = \left(-\frac{k}{2}\cdot 0 + D\right)^2 = D^2$

$t=10$ $\frac{V}{4} = \left(-\frac{k}{2}\cdot 10 + D\right)^2$

$$\Rightarrow \ D = \sqrt{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{V}{4} = \left(-\frac{k}{2}\cdot 10 + \sqrt{V}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{V}}{2} = -5k + \sqrt{V}$$

$$5k = \frac{\sqrt{V}}{2} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{V}}{10}.$$

$$\Rightarrow \ y(t) = \left(-\frac{\sqrt{V}t}{20} + \sqrt{V}\right)^2 = V\left(-\frac{1}{20}t + 1\right)^2.$$

Vannet har rennet ut når $y(t) = 0 \ \Rightarrow \ -\frac{1}{20}t + 1 = 0$

$\Rightarrow \ t = 20$ minutter.