Andre ordens homogene lineære ligninger
med konstante koeffisienter.

$$y'' + py' + qy = 0 \quad , \quad p, q \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

$y(x)$ ukjent funksjon.

Lemma Anta at y_1 og y_2 er løsningen. Da er

$$y(x) = C y_1(x) + D y_2(x)$$

også en løsning uansett valg av $C, D \in \mathbb{R}$.

Hvordan finner vi en løsning ?

Vet at $y' = ry$ har en løsning $y(x) = Ce^{rx}$

Prøv $y(x) = e^{rx}$ i $(*)$

$y'(x) = re^{rx}$, $y''(x) = r^2 e^{rx}$

$$\Rightarrow \quad y'' + py' + qy = r^2 e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0$$

$$e^{rx}\left(r^2 + pr + q\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2 + pr + q = 0$$

kalles den karakteristiske ligningen

Tre muligheter

(i) To reelle røtter $r_1, r_2, \; r_1 \neq r_2$.

(ii) En reell rot r_1

(iii) Komplekse konjugerte røtter $r, \bar{r} \in \mathbb{C}$.

(i) Kar. lign. er $r^2 + pr + q = 0$ har røtter $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.
$r_1 \neq r_2$.

Da er den generelle løsningen

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

(og dette er alle løsninger).

Eksempel. $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Kar. lign. $r^2 + r - 2 = 0$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2},$$

$\Rightarrow \quad r_1 = -2, \quad r_2 = 1.$

Gen. løsningen: $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

$$= C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}.$$

Initialverdier? $y'(x) = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$

$y(0) = 1 = C_1 + C_2$

$y'(0) = 0 = -2C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 2C_1$

$\Rightarrow 1 = C_1 + 2C_1 = 3C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{3}, \; C_2 = \frac{2}{3}.$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{3} e^{-2x} + \frac{2}{3} e^{x}.$$

(ii) Kar. lign. $r^2 + pr + q = 0$ har en reell rot r_1

Da vet vi at $y_1 = e^{r_1 x}$ er en løsning

En annen løsning er $y_2 = x e^{r_1 x}$. Hvorfor ?

Først ser at $0 = r^2 + pr + q = (r - r_1)^2 = r^2 - 2r_1 r + r_1^2$

$\Rightarrow \quad p = -2r_1, \quad q = r_1^2.$

$y_2'(x) = e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x}$, $y_2''(x) = r_1 e^{r_1 x} + r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x} = 2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x}.$

Da er $y_2'' + py_2' + qy_2$

$$= \left(2r_1 e^{r_1 x} + r_1^2 x e^{r_1 x}\right) - 2r_1\left(e^{r_1 x} + r_1 x e^{r_1 x}\right)$$
$$+ r_1^2 x e^{r_1 x} = 0$$

Generelle løsningen er $y(x) = e^{r_1 x}(C_1 + C_2 x)$.

Eksempel $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -2$

k. l. $r^2 - 4r + 4 = 0$, $(r-2)^2 = 0$

$r_1 = 2$. Gen. løsn $y(x) = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$

$y'(x) = 2e^{2x}(C_1 + C_2 x) + e^{2x} \cdot C_2$.

$0 = y(1) = e^2(C_1 + C_2)$ (i)

$-2 = y'(1) = 2e^2(C_1 + C_2) + C_2 e^2$ (ii)

(i) $\Rightarrow$ $C_1 + C_2 = 0$ $\Rightarrow$ $-2 = C_2 e^2$ $\Rightarrow$ $C_2 = -2e^{-2}$,

$C_1 = 2e^{-2}$ $\Rightarrow$ $y(x) = e^{2x}(2e^{-2} - 2e^{-2}x) = 2e^{2x-2}(1-x)$.

(iii) $r^2 + pr + q = 0$ har komplekse røtter r og $\bar{r}$.

Generelle komplekse løsning $C_1 e^{rx} + C_2 e^{\bar{r}x}$

Må få vekk de komplekse tall !

Vi vet at $y(x)$ er reell $\Rightarrow$ $\bar{y}(x) = y(x)$

$$\bar{y}(x) = \bar{C_1} e^{\bar{r}x} + \bar{C_2} e^{\bar{\bar{r}}x} = \bar{C_1} e^{\bar{r}x} + \bar{C_2} e^{rx}$$

$\bar{y}(x) = y(x) \Rightarrow C_1 = \bar{C_2}, \quad C_2 = \bar{C_1} \Rightarrow C_1, C_2$ konjugerte

$$\Rightarrow \quad y(x) = C_1 e^{rx} + \bar{C_1} e^{\bar{r}x} .$$

La $r = a + ib$, $C_1 = A + iB$

$\bar{r} = a - ib$, $\bar{C_1} = A - iB$

$$\Rightarrow y(x) = (A + iB) e^{(a+ib)x} + (A - iB) e^{(a-ib)x}$$
$$= e^{ax} \left((A + iB) e^{ibx} + (A - iB) e^{-ibx} \right)$$
$$= e^{ax} \left((A+iB)(\cos bx + i \sin bx) + (A-iB)(\cos bx - i \sin bx) \right)$$
$$= e^{ax} \left(2A \cos bx + 2 i^2 B \sin bx \right)$$
$$= e^{ax} \left(2A \cos bx - 2B \sin bx \right)$$
$$= e^{ax} \left(C \cos bx + D \sin bx \right)$$

Dette er den gen. (reelle) løsningen, hvor $r = a + ib$.
og $C, D \in \mathbb{R}$ er vilkårlige konstanter.

Eksempel. $y'' + 2y' + 4y = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

Kar. lign. $r^2 + 2r + 4 = 0$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}\,i$$

Kan ta $r = -1 + \sqrt{3}\,i$, $a = -1$, $b = \sqrt{3}$.

Gen. løsning er $y(x) = e^{-x}\left(C\cos(\sqrt{3}x) + D\sin(\sqrt{3}x)\right)$

$$\Rightarrow y'(x) = -e^{-x}\left(C\cos\sqrt{3}x + D\sin\sqrt{3}x\right) + e^{-x}\left(-\sqrt{3}\,C\sin\sqrt{3}x + \sqrt{3}\,D\cos\sqrt{3}x\right)$$

$$1 = y(0) = e^{-0}\left(C\cos(0) + D\sin(0)\right) = C \Rightarrow C = 1.$$

$$0 = y'(0) = -e^{-0}\left(C\cdot 1 + D\cdot 0\right) + e^{-0}\left(-\sqrt{3}\,C\cdot 0 + \sqrt{3}\,D\cdot 1\right)$$

$$= -C + \sqrt{3}\,D \Rightarrow D = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-x}\left(\cos\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x\right).$$