Taylorpolynomer med restledd 2

Gitt funksjon $f(x)$ og punkt $a \in \mathbb{R}$ er Taylorpolynomet
$P_n(x) = T_n f(x)$ det entydige polynomet av grad $\leq n$ slik at
$P_n(a) = f(a)$, $P_n'(a) = f'(a)$, ..., $P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

Har vist at

$$P_n(x) = T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}.$$

Restleddet / Feilen : $R_n f(x) = f(x) - T_n f(x)$

Betyr at $f(x) = T_n f(x) + R_n f(x)$

Har vist at hvis $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ for t mellom a og x

er $|R_n f(x)| \leq \dfrac{M\,|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

(dette gjelder både for $x > a$ og $x < a$)

Viste at $R_n f(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_a^x \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{f(t)} \underbrace{(x-t)^n}_{g(t)} \, dt.$ (*)

Alternativt restledd.

Hvis $f^{(n+1)}$ er kontinuerlig i intervallet $[a, x]$, så finnes det et tall $c \in (a, x)$ slik at

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (**)$$

Merk:

1. Dette er nesten det samme som siste ledd i $T_{n+1} f(x)$.
2. c avhenger av x.

For å bevise dette, først bevise et lemma:

Lemma. "Skjæringssetning for integraler"

Anta at $g(t) \geq 0$ for $t \in [a, b]$, og integrerbar, og at $f(t)$ er kontinuerlig for $t \in [a, b]$. Da finnes det $c \in (a, b)$ slik at

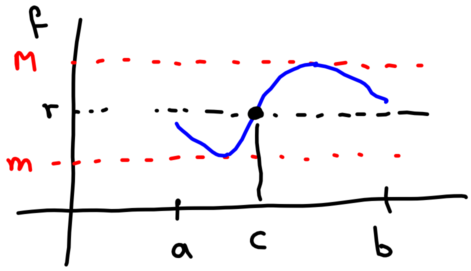
$$\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = f(c) \int_a^b g(t)\, dt. \qquad (*)$$

<u>Bevis</u> Kan anta at $g \neq 0$. La $r = \boxed{\dfrac{\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt}{\int_a^b g(t)\, dt}} \leq \dfrac{\int M g(t)\, dt}{\int g(t)\, dt} = M \dfrac{\cancel{\int g(t)\, dt}}{\cancel{\int g(t)\, dt}}$

Hvis vi nå definerer $m = \min\limits_{a \leq t \leq b} f(t)$, $M = \max\limits_{a \leq t \leq b} f(t)$,

da har vi $m \leq r \leq M$.

Skjæringssetningen på f: det må finnes $c \in (a,b)$ s.a.
$f(c) = r$. $\square$



Tilbake til $R_n f(x)$:

$$R_n f(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)\, (x-t)^n\, dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c) \int_a^x (x-t)^n\, dt$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)\, \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)\, (x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

<u>Eksempel</u> Beregn $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ med feil $< 10^{-4}$.

Ingen antiderivert til $\frac{\sin x}{x}$. Da er det ingen analytisk løsning. Må godta en numerisk løsning.

Bruk Taylor approksimasjon til $\sin x$, $a = 0$. Velg n.

$$\underline{T_{2n}} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}. \quad (*)$$

Da er $I \approx \int_0^1 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n-1)!}\,dx$

$n = 2k$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n-1)!}.$$

Hvor stor skal n være for at feilen er $< 10^{-4}$?

Estimere restleddet

$$|R_{2n} f(x)| = \left| \frac{\overbrace{f^{(2n+1)}(c)}^{\leq 1}\,\overbrace{(x-0)^{2n+1}}^{x^{2n+1}}}{(2n+1)!} \right|, \text{ hvor } 0 < c < 1,$$

$f(x) = \sin x$

alle deriverte til $\sin x$ er $\pm \sin x$ eller $\pm \cos x$.

og derfor er $\left| f^{(2n+1)}(c) \right| \leq 1$

Det betyr at $\left| R_{2n} f(x) \right| \leq \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $0 \leq x \leq 1$

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^1 \frac{T_{2n} \sin x}{x} \right| = \left| \int_0^1 \frac{R_{2n} \sin x}{x}\,dx \right|$$

$$\leq \int_0^1 \frac{\left| R_{2n} \sin x \right|}{x}\,dx$$

$$\frac{x^{2n+1}}{x} = x^{2n}$$

$$\leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx = \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}$$

Det er tilstrekkelig å velge n slik at $\dfrac{1}{(2n+1)\cdot(2n+1)!} < 10^{-4}$.

n	$\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}$
1	$\frac{1}{3\cdot 3!} = \frac{1}{18} \approx 5.6 \times 10^{-2}$
2	$\frac{1}{5\cdot 5!} = \frac{1}{600} \approx 1.7 \times 10^{-3}$
3	$\frac{1}{7\cdot 7!} = \frac{1}{35280} \approx 2.8 \times 10^{-5}$.

nok med $n=3$.

Svar er $n=3$. Og approksimasjon er:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \int_0^1 \frac{T_6 \sin x}{x}\,dx = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!}$$

$$\approx 0{,}9461$$

med nøyaktighet bedre enn 10^{-4}.