Differensligninger

Annen ordens, homogen, $x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$.

Karakteristiske ligningen : $r^2 + br + c = 0$

Røtter r_1, r_2.

Tre tilfeller :

(i) r_1, r_2 er reelle og distinkte. $x_n = C r_1^n + D r_2^n$,
C, D vilkårlige konstanter.

(ii) $r_1 = r_2$, $r_1 \in \mathbb{R}$. , $x_n = C r_1^n + D n r_1^n = (C + Dn) r_1^n$

(iii) $r_2 = \bar{r}_1$, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$.

Se på tilfellet 3. Vi vet at x_n må være reelle.

Bruk samme metode som i tilfellet (i) :

$$\boxed{x_n = C r_1^n + D r_2^n} \quad (*)$$

Dette er den generelle komplekse løsningen.

[Husk $z = a + ib$,
er $\bar{z} = a - ib$,
$i = \sqrt{-1}$]

Hvis x_n er reell, $\bar{x}_n = x_n$.

$$\Rightarrow \boxed{\bar{x}_n = \bar{C}\, \bar{r}_1^n + \bar{D}\, \bar{r}_2^n} \quad (**)$$

[Husk at $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$]

Vi har vist at $\underline{x_n = C r^n + \bar{C} \bar{r}^n}$.

Nå bruke polar formen av r : $\boxed{r = \rho e^{i\theta}}$, $\rho, \theta \in \mathbb{R}$.

$C = A + iB$, $A, B \in \mathbb{R}$

Nå er $x_n = (A+iB)\rho^n e^{in\theta} + (A-iB)\rho^n e^{-in\theta}$

(fordi $\bar{r} = \rho e^{-i\theta}$)

[Bruk $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$]

$$\Rightarrow \quad x_n = (A+iB)\rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + (A-iB)\rho^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))$$

$$= \rho^n \left[2A\cos(n\theta) + 2Bi^2 \sin(n\theta) \right]$$

$$\boxed{x_n = \rho^n \left[E\cos(n\theta) + F\sin(n\theta) \right],} \qquad \begin{array}{l} E = 2A \\ F = -2B \end{array}$$

hvor E, F er nye konstanter (reelle).

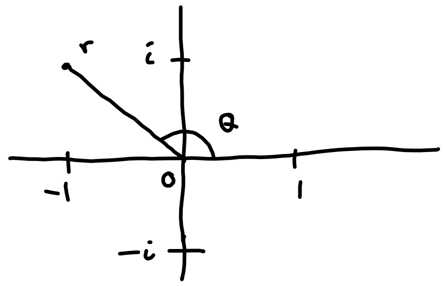
Eksempel. $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

Kar. ligningen: $r^2 + 2r + 2 = 0$. $r = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$$

$r = -1 + i$.

$\mathbb{C}$



$$r = -1 + i = \rho e^{i\theta}$$

ρ = lengden av r

$$= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}.$$

generelle løsningen $\quad x_n = \sqrt{2}^{\,n} \left[E \cos\left(\frac{3\pi}{4} n\right) + F \sin\left(\frac{3\pi}{4} n\right) \right]$

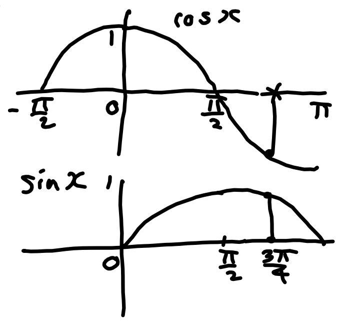
Nå $\quad x_0 = 1, \; x_1 = 2.$

$n = 0: \quad 1 = x_0 = E$

$n = 1: \quad 2 = x_1 = \sqrt{2} \left[E \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + F \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]$

$$= \sqrt{2} \left[E\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

$$= -E + F \quad \Rightarrow F = 3$$



$$\Rightarrow \quad x_n = \sqrt{2}^{\,n} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} n\right) + 3 \sin\left(\frac{3\pi}{4} n\right) \right].$$

Inhomogene ligninger

En ligning på formen $x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f(n)$, $b, c \in \mathbb{R}$

eller $x_{n+1} + r x_n = f(n)$.

Lemma Hvis x_n^p er en løsning er alle løsningen på formen $x_n = x_n^p + x_n^h$,

der x_n^h er en vilkårlig løsning av den homogene ligningen $(f(n)=0)$.

Eksempel : $x_0 = 1000$ 1% rente og legge inn 100 kr per år.

$$x_{n+1} = x_n + 0{,}01\, x_n + 100 = 1{,}01\, x_n + 100.$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{n+1} - 1{,}01\, x_n = 100.} \quad (*)$$

Homogene ligningen er $x_{n+1} - 1{,}01\, x_n = 0$

$$\Rightarrow x_n^h = C\,(1{,}01)^n.$$

Høyresiden er en konstant, derfor prøver vi $x_n^p = A$.

$$\Rightarrow A - 1{,}01\, A = 100 \Rightarrow -0.01\, A = 100 \Rightarrow A = -10000.$$

Da er den generelle løsningen til $(*)$ $x_n = x_n^p + x_n^h = -10000 + C(1.01)^n$.

Initialbetingelse : $1000 = -10000 + C \Rightarrow C = 11000.$

Da er $x_n = 11000\,(1.01)^n - 10000$.

Eksempel 2 $\quad x_{n+1} - 2x_n = 2^n$.

Høyre siden er 2^n. Prøv med $x_n^p = A\,2^n$.

Da er $A\,2^{n+1} - 2.\,A\,2^n = 2^n \Rightarrow 0 = 2^n$

Dette fungerer ikke. Prøv i steden med $x_n^p = A n\,2^n$.

Da ~~trenger~~ $A(n+1)\,2^{n+1} - 2\,A n\,2^n = 2^n$

$$A\{(n+1)\,2^{n+1} - n\,2^{n+1}\} = 2^n$$

$$A\,2^{n+1} = 2^n \Rightarrow A = \tfrac{1}{2}.$$

Kan da skrive $x_n^p = n\,2^{n-1}$.

Homogene ligningen: $x_{n+1} - 2x_n = 0$.

løsningen $x_n^h = C\,2^n$.

Generelle løsningen $x_n = x_n^h + x_n^p = C.\,2^n + n\,2^{n-1}$.

Generelle regler

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f(n)$$

eller

$$x_{n+1} + r x_n = f(n)$$

(i) Hvis $f(n)$ er et polynom, prøv med $x_n^p = g(n)$, hvor g er et polynom med samme grad.

(ii) $f(n) = a^n p(n)$, p et polynom. prøv med $x_n^p = a^n g(n)$, g polynom samme grad som p.
(noen ganger må gange med n : $x_n^p = a^n n g(n)$)

(iii) $f(n) = b^n \left(A \sin(an) + B \cos(an)\right)$. Prøv med

$$x_n^p = b^n \left(C \sin(an) + D \cos(an) \right).$$