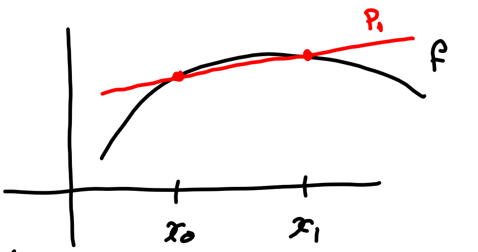
Interpolasjon 9.2.1, 9.2.2 Kompendiet.

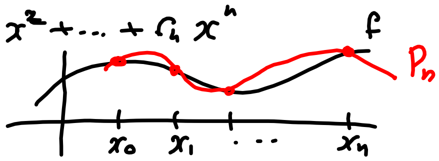
Taylor approksimasjon. Sett at det finnes et entydig bestemt polynom av grad $\leq n$ som har samme deriverte som f i et punkt a, opp til orden n. Hvis polynomet er $P_n(x)$ så er $P_n(a) = f(a)$, $P_n'(a) = f'(a)$, ..., $P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

I stedet kan vi matche verdier av f i $n+1$ punkter, $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. d.v.s. ønsker å finne polynomet $P_n(x)$ slik at $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Dette er interpolasjonsproblemet

Eksempel: $n = 1$

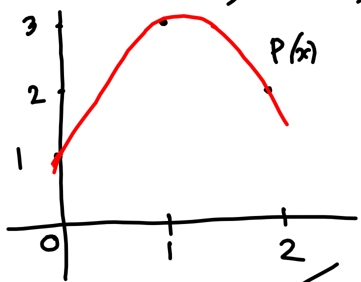


Generelt: ønsker vi $P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$ slik at $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$



<u>Eksempel n=2</u> Finn polynom som interpolerer (0,1), (1,3), (2,2).

d.v.s. at $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(2)=2$.



Prøv med polynom grad 2 :

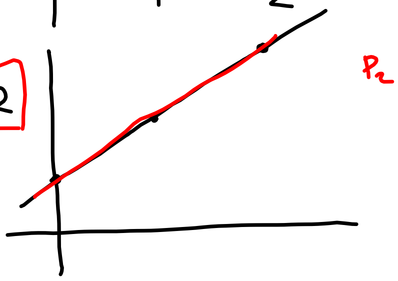
$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$. (*)

$1 = f(0) = P(0) = c_0 \Rightarrow c_0 = 1$

$3 = f(1) = P(1) = c_0 + c_1 + c_2 = 1 + c_1 + c_2$, $\boxed{c_1 + c_2 = 2}$

$2 = f(2) = P(2) = c_0 + 2c_1 + 4c_2 = 1 + 2c_1 + 4c_2$

$\Rightarrow \boxed{2c_1 + 4c_2 = 1}$



Kan løse : $c_1 = \frac{7}{2}$, $c_2 = -\frac{3}{2}$.

Dermed er $P(x) = 1 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^2$. (*)

Bedre med Newtonform

Eksempel igjen $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,2)$

Newtonform: $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1)$

$1 = f(0) = P(0) = c_0 \Rightarrow c_0 = 1.$

$3 = f(1) = P(1) = c_0 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_0 + c_1 = 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 2.$

$2 = f(2) = P(2) = c_0 + 2c_1 + 2c_2 = 1 + 2 \cdot 2 + 2c_2 \Rightarrow c_2 = -3/2$

$$\Rightarrow P(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2} x(x-1) = 1 + \frac{7}{2} x - \frac{3}{2} x^2$$

Generell n: Hvis vi har punktene $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ (distinkte)

er Newtonformen

$$P(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

Da kan vi finne $c_0, c_1, c_2, \dots c_n$ rekursivt