Kapittel 1. Naturlige tall.

Naturlige tall $1, 2, 3, 4, \ldots$

Mengden av naturlige tall $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Hele tall $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Partall : de som er delelig med 2 : $2, 4, 6, 8, \ldots$

Oddetall : de andre $1, 3, 5, 7, \ldots$

Summetegn

Eksempel: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \sum_{n=1}^{10} n^2$

Eksempel 2: $\sum_{n=1}^{22} (2n-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + 43.$

Generelt: $\sum_{n=k}^{m} a_n = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{m-1} + a_m.$

Antar at $k \leq m$.

n summasjonsindeksen

k nedre summasjonsgrense

m øvre "

Eksempel $$1-x+x^2-x^3+\dots-x^{17}=\sum_{n=0}^{17}(-1)^n x^n.$$

$$x^0-x^1+x^2-\dots$$

$$(-1)^n=\underbrace{(-1)\times(-1)\times\dots\times(-1)}_{n}=\begin{cases}1 & n \text{ partall}\\ -1 & n \text{ oddetall}\end{cases}$$

Husk at $x^0=1$ $\quad (0^0:=1)$

3 egenskaper med summetegn:

$$\sum_{n=k}^{m}a_n+\sum_{n=k}^{m}b_n=\sum_{n=k}^{m}(a_n+b_n) \qquad (1)$$

$$\sum_{n=k}^{m}c\,a_n=c\sum_{n=k}^{m}a_n \qquad (2)$$

$$\sum_{n=k}^{m}a_n+\sum_{n=m+1}^{l}a_n=\sum_{n=k}^{l}a_n \qquad (3)$$

Bevis Bare (1).

$$\begin{aligned}\text{V.S.}=\sum_{n=k}^{m}a_n+\sum_{n=k}^{m}b_n&=(a_k+a_{k+1}+\dots+a_{m-1}+a_m)+(b_k+b_{k+1}+\dots+b_{m-1}+b_m)\\&=(a_k+b_k)+(a_{k+1}+b_{k+1})+\dots+(a_m+b_m)\\&=\sum_{n=k}^{m}(a_n+b_n).\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Skifte index

$$S = \sum_{k=-3}^{11} (-1)^k x^{k+3}$$

Skifte indeks : $i = k+3$

k løper fra -3 til 11

$\Rightarrow$ i løper fra 0 til 14 , $k = i-3$

$$\Rightarrow \quad S = \sum_{i=0}^{14} (-1)^{i-3} x^i = \sum_{i=0}^{14} (-1)^i (-1)^{-3} x^i$$

$$= -(1 - x + x^2 - \cdots + x^{14})$$

$$= -1 + x - x^2 + \cdots - x^{14}.$$

$$= (-1)^{-3} \sum_{i=0}^{14} (-1)^i x^i = -\sum_{i=0}^{14} (-1)^i x^i$$

(Egenskap (2))

$$(-1)^{-3} = \frac{1}{(-1)^3} = \frac{1}{(-1)} = -1.$$