Velkommen til MAT-IN1105

Kapittel 1. Seksjon 1.1. Naturlige tall.

Naturlige tall $1, 2, 3, 4, \ldots$

Mengden av naturlige tall $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Hele tall $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Partall : $2, 4, 6, 8, \ldots$ delelig med 2

oddetall : $1, 3, 5, 7, \ldots$ ikke delelig med 2.

<u>Summetegn</u> :

Eksempel $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = \sum_{n=1}^{10} n$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \sum_{n=1}^{10} n^2$

$\sum_{n=1}^{22} (2n-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + 43.$

<u>Definisjon</u> $\displaystyle\sum_{n=k}^{m} a_n = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{m-1} + a_m.$

$k \leq m$

n <u>summasjonsindeks</u>

k <u>nedre summasjonsgrense</u>

m <u>øvre "</u>

Eksempel: $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{17} = \displaystyle\sum_{n=0}^{17} (-1)^n x^n$

Merk: $x^0 = 1$

<u>3 egenskaper</u> :

$$\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=k}^{m} b_n = \sum_{n=k}^{m} (a_n + b_n) \qquad (1)$$

$$\sum_{n=k}^{m} c\, a_n = c \sum_{n=k}^{m} a_n \qquad (2)$$

$$\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{l} a_n = \sum_{n=k}^{l} a_n \qquad (3)$$

$$k \leq m \leq l$$

n: $k, k+1, \ldots, m$,

$m+1, m+2, \ldots, l$

Bevis Bare (2):

$$\sum_{n=k}^{m} c\, a_n = (c\, a_k) + (c\, a_{k+1}) + \ldots + (c\, a_m)$$
$$= c a_k + c a_{k+1} + \ldots + c a_m$$
$$= c\,(a_k + a_{k+1} + \ldots + a_m) = c \sum_{n=k}^{m} a_n .$$

Oppgaver. 3. Skriv summene uten summetegn og regn ut verdien.

a) $$\sum_{n=1}^{6} 2^n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$$
$$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$$
$$= 126 .$$

3c. $$\sum_{n=0}^{5} \frac{2}{n+1} = 2 \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n+1}$$ egenskap (2)

$$= 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{2}{60}\left(60 + 30 + 20 + 15 + 12 + 10\right)$$

$$= \frac{1}{30}\left(60 + 30 + 20 + 15 + 12 + 10\right)$$

$$= \frac{147}{30} = \frac{49}{10} = 4.9$$

4,9

1.2 Induksjonsbevis

La n være et naturlig tall d.v.s. $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
Vi kaller P_n et utsagn hvis P_n enten er sant eller ikke sant.

Eksempel P_n : "$n+1$ er delelig med 3".

P_1 : $n+1 = 1+1 = 2$ $\frac{2}{3}$. ikke delelig med 3 usant
P_2 : $2+1 = 3$ delelig med 3, sant
P_3 : $3+1 = 4$, $\frac{4}{3}$ usant.

Eksempel 2 P_n : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$.

Prøver : $n=1$. P_1 : $\sum_{i=1}^{1} i = 1$ | $\frac{1}{2} 1.(1+1) = 1$ sant
$n=2$ P_2 : $\sum = 1+2 = 3$ | $\frac{1}{2} 2.(2+1) = 3.$ sant

$n=3$ P_3 $\sum_{i=1}^{3} i = 1+2+3 = 6.$

$\frac{1}{2}3.(3+1) = 6.$ ✓ sant.

Induksjonsprinsippet

La P_n være et utsagn for alle naturlige tall n.
Anta videre at følgende to krav er oppfylt:

(i) P_1 er sant
(ii) Dersom P_k er sant for en vilkårlig $k \in \mathbb{N}$
så er P_{k+1} sant.

Da er P_n sant for alle $n \in \mathbb{N}$.

Eksempel: P_n : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1).$

Bevis

P_1 : $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1}{2} 1.(1+1).$ ✓ sant.

Nå anta at P_k er sant, vilkårlig $k \in \mathbb{N}$.

Ønsker å vise at P_{k+1} er sant.

P_k : $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2} k (k+1).$ P_{k+1} : $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{2} (k+1)((k+1)+1)$

P_{k+1} ? $\sum_{i=1}^{k+1} i = \left(\sum_{i=1}^{k} i \right) + k+1$

$$= \frac{1}{2} k (k+1) + (k+1)$$
$$= (k+1) \left(\frac{1}{2} k + 1 \right)$$
$$= (k+1) \cdot \frac{1}{2} (k+2)$$
$$= \frac{1}{2} (k+1)(k+2).$$

Da har vi vist P_{k+1}.

Eksempel. Vis at $n(n^2+5)$ er delelig med 6.
Opp. 1.2.6. for alle $n \in \mathbb{N}$.

Bruk induksjon. (i) P_1 ? $1(1^2+5)$ delelig med 6 ? Ja

$1 \cdot (1^2+5) = 1+5 = 6.$

Anta at P_k stemmer, d.v.s. $k(k^2+5)$ er delelig med 6.

Må vise at $(k+1)((k+1)^2+5)$ er delelig med 6.

$$k((k+1)^2+5) + (k+1)^2+5$$

$$= k(k^2+2k+1+5) + k^2+2k+1+5$$

$$= k(k^2+5) + k(2k+1) + k^2+2k+6$$

$$= k(k^2+5) + 3k^2+3k+6$$

$$= \underbrace{k(k^2+5)}_{\text{delelig med 6}} + 3k(k+1) + 6.$$

$k(k+1)$ er et partall, delelig med 2

$\Rightarrow 3k(k+1)$ delelig med 6.

$\Rightarrow P_{k+1}$ er sant. $\square$