Velkommen til MAT-IN1105 / MAT-INF1100
(felles undervisning denne uken).

Dagens mål finn ut hva er $(a+b)^n$.

Husk: summetegn : $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_{m-1} + a_m = \sum_{n=k}^{m} a_n$

Induksjonsbevis : vise at et utsagn P_n er sant:
(for alle $n \in \mathbb{N}$) nok å vise at (i) P_1 er sant og
(ii) vis at P_{k+1} er sant gitt at P_k er sant for alle $k \in \mathbb{N}$.

Hvordan regne ut $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$. $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b) \times (a+b) = a(a+b) + b(a+b) \\
&= a^2 + ab + ba + b^2 \\
&= a^2 + ab + ab + b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) \\
&\quad a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) \\
&= a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
&\quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 &= a(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\
&\quad + b(\quad \text{"} \quad) \\
&= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\
&\quad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\
&= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{aligned}
$$

Hva er koeffisientene ?

Svar : Pascals trekant.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Binomial koeffisient : $\binom{n}{i}$ n naturlig tall
i naturlig tall

$0 \leq i \leq n$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1.$ $0! = 1$

Eksempler: $\binom{n}{i}$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3\cdot\cancel{2}\cdot 1}{\cancel{2}\cdot 1\cdot 1} = 3$$

$n=0$ $\quad 1\binom{0}{0}$

$n=1$ $\quad 1\binom{1}{0} \quad 1\binom{1}{1}$

$n=2$ $\quad 1\binom{2}{0} \quad 2\binom{2}{1} \quad 1\binom{2}{2}$

$n=3$ $\quad 1\binom{3}{0} \quad 3\binom{3}{1} \quad 3\binom{3}{2} \quad 1\binom{3}{3}$

$\binom{n}{i}$ er antall måter å velge i elementer fra n distinkte objekter.

Teorem Binomialteoremet :

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i .$$

for alle $n \in \mathbb{N}$. Bevis: Bruk induksjon på n.

(og bruk : $\underline{\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}}$.