

Velkommen til MAT-1N1105 / MAT-INF1100  
(Felles undervisning denne uken).

Dagens mål Fin ut hva er  $(a+b)^n$ .

Husk: summetegn :  $a_k + a_{k-1} + \dots + a_{m-1} + a_m = \sum_{n=k}^m a_n$

Induksjonsbevis : vise at et utsagn  $P_n$  er sant :  
(for alle  $n \in \mathbb{N}$ ) nok å vise at (i)  $P_1$  er sant og  
(ii) vis at  $P_{k+1}$  er sant gitt at  $P_k$  er sant  
for alle  $k \in \mathbb{N}$ .

Hvordan regne ut  $(a+b)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  $n=1,2,3,\dots$

$$(a+b)^1 = a+b$$

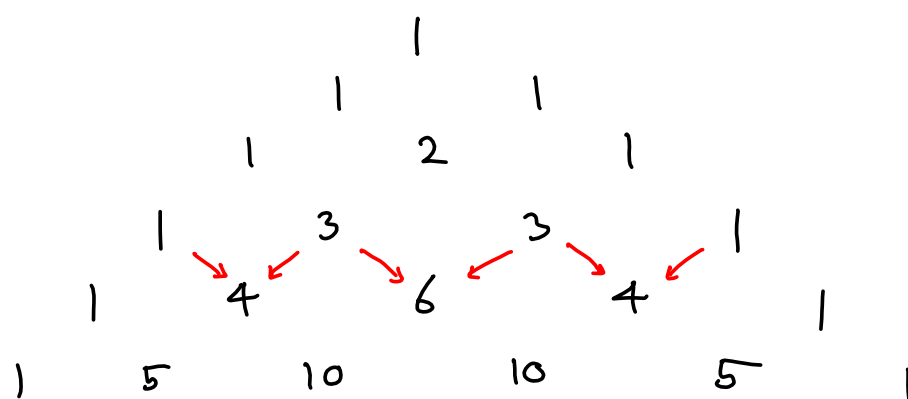
$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b) \times (a+b) = \underbrace{a(a+b)} + \underbrace{b(a+b)} \\ &= a^2 + ab + \underline{ba} + b^2 \\ &= a^2 + ab + \underline{ab} + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + \underline{2a^2b} + ab^2 \\ &\quad + \underline{a^2b} + 2ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &= a(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &\quad + b(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &= \underline{a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3} \\ &\quad + \underline{a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4} \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

Hva er koeffisientene?

Svar: Pascals trekant.



Binomial koeffisient:  $\binom{n}{i}$  n naturlig tall  
i naturlig tall

$$0 \leq i \leq n$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i! (n-i)!}$$

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1.$$

$$0! = 1$$

Eksempler:  $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot 1} = 3$

$$n=0$$

$$1 \binom{0}{0}$$

$$n=1$$

$$1 \binom{1}{0}$$

$$1 \binom{1}{1}$$

$$n=2$$

$$1 \binom{2}{0}$$

$$2 \binom{2}{1}$$

$$1 \binom{2}{2}$$

$$n=3$$

$$1 \binom{3}{0}$$

$$3 \binom{3}{1}$$

$$3 \binom{3}{2}$$

$$1 \binom{3}{3}$$

$\binom{n}{i}$  er antall måter å velge  $i$  elementer fra  $n$  distinkte objekter.

Teorem Binomialteoremet :

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i .$$

For alle  $n \in \mathbb{N}$ ,

Bevis : Bruk induksjon på  $n$ .

og bruk :  $\underline{\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}} .$