MAT-INF1100. Seksjon 1.4. Binomialformelen.

Hvordan regne ut $(a+b)^n$, hvor $n \in \mathbb{N}$.

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b)$

$= (a^2 + ab) + (ab + b^2)$

$= a^2 + 2ab + b^2$.

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a(a+b)^2 + b(a+b)^2$

$= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2$

$+ 1.a^2b + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = \cdots a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Pascals trekant

1   n = 0

1   1   n = 1

1   2   1

1   3   3   1

1   4   6   4   1

1 $\binom{5}{0}$ 5 $\binom{5}{1}$ 10 $\binom{5}{2}$ …   1 $\binom{5}{5}$ n = 5

$\boxed{6} = 1+2+3$

$\boxed{10} = 1+2+3+4$

Binomialkoeffisienter $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$, i, n naturlige tall $0 \le i \le n$.

$n! =$ "n fakultet" $= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. $\qquad 0! = 1$.

<u>Eks.</u> $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \frac{20}{2} = 10$

Lemma For alle naturlige tall n, og i, $0 \le i \le n$, er

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}.$$

Bevis Algebra.

$$\text{V.S.} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i+1)!} + \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n!}{\underline{(i-1)(i-2)}\cdots 1\,(n-i+1)!} + \frac{n!}{i\,\underline{(i-1)(i-2)}\cdots(\,)!}$$

$n!$ felles faktor

$i!\,(n-i+1)!$ felles nevner.

$$= \frac{n!}{i!(n-i+1)!}\left(\cancel{i} + (n-\cancel{i}+1)\right)$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{i!\,(n-i+1)!} = \frac{(n+1)!}{i!\,(n+1-i)!} = \binom{n+1}{i}. \quad \square$$

Teorem : **Binomialteoremet** : For alle $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Bevis : Induksjon på n.

Reelle tall. Kap. 2.

Naturlige tall $1, 2, 3, 4, \ldots$ $\mathbb{N}$

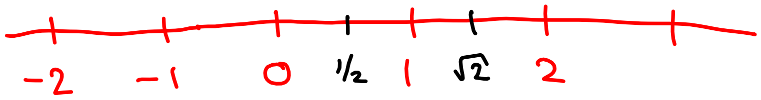
Hele tall $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ $\mathbb{Z}$.

Rasjonale tall (brøker), $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. $\mathbb{Q}$

π, $\sqrt{2}$ irrasjonale tall

Reelle tall = rasjonale og irrasjonale tall, $\mathbb{R}$.

$\sqrt{2} = 1.4142\ldots$



Intervall.

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. lukket intervall.

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ åpent intervall.

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.

Antar at $a \leq b$.

$[a,a] = \{a\}$ $(a,a) = \emptyset$

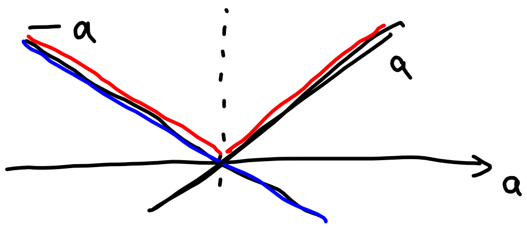
Tallverdien Tallverdien av et reelt tall a er:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{hvis } a \geq 0, \\ -a & \text{hvis } a < 0. \end{cases}$$

Trekantulikheten Hvis $a, b \in \mathbb{R}$ så er

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Tallverdien



$|a| = \max\{a, -a\}$.

≥ 0.

Bevis. (1) $a+b \leq |a| + |b|$.

(2) $-(a+b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|$

$\Rightarrow |a+b| = \max\{a+b, -(a+b)\} \leq |a| + |b|$. □

$a = 2,\ b = 3 \Rightarrow |a+b| = |5| = 5$, $|a|+|b| = 5$. likhet

$a = 2,\ b = -3 \Rightarrow |a+b| = |-1| = 1$, $|a|+|b| = 2+3 = 5$ ulikhet

$a = -2,\ b = -3 \Rightarrow |a+b| = |-5| = 5$, $|a|+|b| = 5$, likhet

---

$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \}$. Merk at $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ = mengden av rasjonale tall.

Et tall som ikke er rasjonalt er "irrasjonalt tall".

Setning 2.2.1. Hvis x, y er rasjonale tall er

$x+y,\ x-y,\ xy,\ \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$ rasjonale tall.

Bevis: $x+y$! $x = \frac{a}{b},\ y = \frac{c}{d} \Rightarrow x+y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{da+bc}{bd}$. □

Merk: $3^{1/2} = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ikke en brøk. $3^2 = 9 \in \mathbb{Q}$