MAT-INF1100. ~~Kapittel~~ 2. ~~Fortsett~~. Reelle tall.

Rasjonale tall: x rasjonal $\Leftrightarrow$ $x = \frac{a}{b}$,

hvor $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

$\mathbb{Q}$ er mengden av alle rasjonale tall.

Reelle tall som ikke er rasjonale er <u>irrasjonale</u>.

Skal vise at irrasjonale tall finnes.

<u>Lemma 2.2.3</u> Dersom $a \in \mathbb{N}$ er et oddetall

så er a^2 også et oddetall.

<u>Bevis</u> Siden a er et oddetall kan vi skrive a

som $a = 2n-1$, hvor $n \in \mathbb{N}$.

Da er $a^2 = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 4n(n-1) + 1$.

$4n(n-1)$ er delelig med 2. Viser at a^2 er oddetall.

2.4.4. Teorem $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

Bevis Anta det motsatte, d.v.s. at $\sqrt{2}$ er rasjonalt tall.
Da er $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.
Vi kan anta at brøken a/b er forkortet så mye som mulig, d.v.s. det finnes ingen felles primtallsfaktorer i a og b. $\left(\frac{6}{2} = \frac{3}{1}\right)$. Kvadrere:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}. \Rightarrow 2b^2 = a^2. \quad (*)$$

Dette betyr at a^2 er et partall. Ved Lemma 2.2.3, må a være et partall. Det betyr at $a = 2n$, hvor $n \in \mathbb{N}$. Dette betyr at

$$2b^2 = 4n^2 \Rightarrow b^2 = 2n^2$$

Dermed er b^2 er partall. Ved Lemma 2.2.3 er b er et partall. Begge tall a, b er partall. Selvmotsigelse. □

Flere irrasjonale tall:

For eksempel $\sqrt{2} + 1$ er irrasjonalt.

Generelt: hvis x er irrasjonalt, y rasjonalt er

$x+y$ irrasjonalt.

Hvorfor? Anta at $x+y$ er rasjonalt $x+y = a$,

a rasjonalt. $\Rightarrow x = a - y$.

a, y rasjonal $\Rightarrow x$ rasjonal. selvmotsigelse.

Eksempel: $2 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ er irrasjonalt.

irrasjonal + irrasjonal = vet ikke

$\sqrt{5} + (1 - \sqrt{5}) = 1$

Ek $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$= \frac{\cancel{5} + 2\sqrt{5} + 1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{5 + \cancel{2\sqrt{5}} + 1 - \cancel{2\sqrt{5}}}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

2.2.6. Arkimedes Prinsipp

(i) For ethvert reelt tall a (uansett hvor stort) finnes det et naturlig tall n som er større enn a.

(ii) For ethvert positivt reelt tall b (uansett hvor lite) finnes det et naturlige tall m slik at $\frac{1}{m}$ er mindre enn b.

Bevis (i) Hvis $a < 1$ la $n = 1$.
Ellers er $a \geq 1$. Bruk desimalformen av a fjern alle siffrene etter desimalpunktet og plusse med 1. $\Rightarrow$ gir n.

(ii) Bruk (i). Finn m større enn $\frac{1}{b}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{m} < b$. $\square$

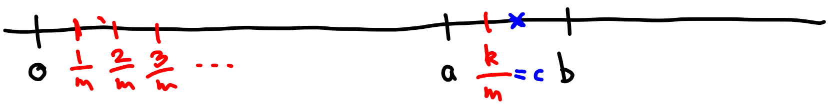
2.2.7. Setning

Ethvert åpent intervall (a,b) (hvor $a < b$) inneholder både rasjonale og irrasjonale tall.

Bevis Først vis at det finnes et rasjonalt tall.

La $m \in \mathbb{N}$ slik at $\frac{1}{m} < b - a$ (Arkimedes Prinsipp (ii))

Må finnes et helt tall k s.a. $\frac{k}{m} \in (a,b)$.



× $c + \frac{\sqrt{2}}{p}$. irrasjonalt.

Presist: La k være det minste hele tall s.a. $k > am$.

$\Rightarrow \frac{k}{m} > a$. Samtidig: $\frac{k}{m} = \frac{k-1}{m} + \frac{1}{m} \leq a + \frac{1}{m} < a + (b-a) = b$.

$\Rightarrow \frac{k}{m} \in (a,b)$.

Finn irrasjonalt tall? La $c = \frac{k}{m}$

Ønsker å velge $p \in \mathbb{N}$ ~~stor~~ nok at $c + \frac{\sqrt{2}}{p} < b$.

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{p} < b - c \Leftrightarrow \frac{1}{p} < \frac{b-c}{\sqrt{2}}$. ✓ (A.P. (ii))

$\square$

<u>Kompletthet</u> av de reelle tallene.

Ligning $x^2 - 2 = 0$, $x \in \mathbb{Q}$.

Ingen løsning i tallsystemet $\mathbb{Q}$.

Men det er en løsning i tallsystemet $\mathbb{R}$.

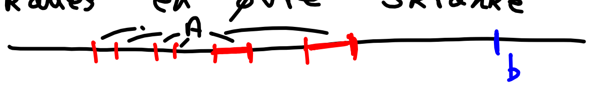
$\mathbb{R}$ har ingen "hull".

[Merk: $x^2 + 2 = 0 \Rightarrow$ trenger $\mathbb{C}$ komplekse tall].

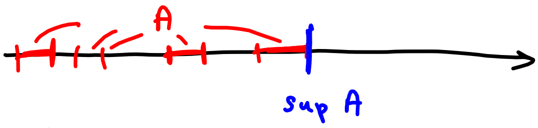
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

<u>Notasjon</u>: En delmengde A av $\mathbb{R}$ kalles oppad begrenset hvis det finnes et tall $b \in \mathbb{R}$ som er større enn alle elementene i A.

b kalles en øvre skranke for A.



Sier at b er den minste øvre skranken til A dersom b er mindre enn alle andre øvre skranker. Da er b den minste øvre skranken eller <u>supremum</u> til A. , $b = \sup A$.



<u>Kompletthetsprinsippet</u> : Enhver ikke-tom oppad begrenset delmengde A av $\mathbb{R}$ har en minst øvre skranke.

(dette gjelder ikke for $\mathbb{Q}$) $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$