Differensligninger

Eks. Vi har 1000 kr som vi setter i banken til 2 % rente. Hvor mye har vi etter n år?

La x_n være kronebeløp etter n år

$$x_{n+1} = x_n + 0.02\, x_n = 1{,}02\, x_n, \quad x_0 = 1000$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

La oss anta at vi tar ut 100 kr i året.

Da blir modellen

$$x_{n+1} = 1{,}02\, x_n - 100$$

Eks. 2. Harer formerer seg ved at ett par får ~~unger~~ 1 par unger, og ungene fortsetter å formere seg når de er to måneder gamle.

Hvordan vil bestanden vokse?

La x_n være antall par etter n måneder.

Da er $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$

siste måned — barn

$n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Eksempler:

$x_{n+1} = 1.02\, x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $x_0 = 1000$, $x_1 = 1020$, $x_2 = 1044, \ldots$

$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $x_0 = x_1 = 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5, \ldots$

Løsning ved formel

Vi har $x_{n+1} = 1.02\, x_n$, $x_0 = 1000$

$x_1 = 1{,}02 \cdot x_0$, $x_2 = 1{,}02\, x_1 = 1{,}02^2 x_0$

$x_3 = 1{,}02 \cdot x_2 = 1{,}02 \cdot 1{,}02^2 x_0 = 1{,}02^3 x_0$

$x_{n+1} = 1{,}02^{n+1} x_0 = 1{,}02^{n+1} \cdot 1000$

Generelt: $x_{n+1} = r \cdot x_n$ gir $x_{n+1} = r^{n+1} x_0$

$x_n = r^n \cdot x_0$

Løsning av andreordens, lineære, homogene differensligninger.

Eks. Fibonacci $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $x_0 = x_1 = 1$

Kan skrives $x_{n+1} - x_n - x_{n-1} = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

eller $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Generelt: (#) $\boxed{x_{n+2} + b\, x_{n+1} + c\, x_n = 0}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $b, c \in \mathbb{R}$

Lemma. Anta at $\{y_n\}$ og $\{z_n\}$ er to løsninger av (#). Hvis C og D er to vilkårlige reelle tall så er også

$$x_n = C y_n + D z_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

en løsning av (#).

Fordi fordi $y_{n+2} + b y_{n+1} + c y_n = 0$

$z_{n+2} + b z_{n+1} + c z_n = 0$

Kjerneargument for å finne løsning.

Husk at ligningen $x_{n+1} = r x_n$ har løsning $x_n = r^n x_0$. Vi skal forsøke å løse

$$x_{n+2} + b\, x_{n+1} + c\, x_n = 0$$

ved å prøve med $x_n = r^n$ – r ukjent tall.

$x_n = r^n$, $x_{n+1} = r^{n+1}$, $x_{n+2} = r^{n+2}$

$$0 = x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = r^{n+2} + b r^{n+1} + c \cdot r^n$$

$$= r^n (r^2 + b r + c), \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Funker om $r^2 + b r + c = 0$, r løser 2. grads lign.

Tre tilfeller:

i) To reelle røtter

ii) En reell rot

iii) To komplekse konjugerte røtter

To reelle røtter.

Ligning: $x_{n+2} + b\, x_{n+1} + c\, x_n = 0$

Karakteristisk ligning: $r^2 + b r + c = 0$ har to reelle røtter r_1 og r_2.

Da vil $x_n = C \cdot r_1^n + D \cdot r_2^n$ være en løsning for alle valg av C og D.

Eks. $x_{n+2} - 5\, x_{n+1} + 4\, x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = -2$

Kar. lign. $r^2 - 5r + 4 = 0$

$$r = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}, \quad r_1 = 1, \ r_2 = 4$$

Generell løsning $x_n = C \cdot r_1^n + D \cdot r_2^n$

$$= C \cdot 1^n + D \cdot 4^n = C + D \cdot 4^n$$

Tilpasse til startverdier:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= x_0 = C + D \cdot 1 = C + D \\ -2 &= x_1 = C + D \cdot 4 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C + D &= 1 \\ C + 4D &= -2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} C &= 2 \\ D &= -1 \end{aligned}$$

Altså har vi $x_n = 2 - 4^n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

<u>En reell rot.</u>

Bare en reell rot r_1, $r_1^2 + br_1 + c = 0$.

Da vil r_1^n være en løsning.

Det viser seg at nr_1^n også er en løsning i dette tilfellet.

Generell løsning $x_n = C r_1^n + D \cdot n \cdot r_1^n$

To komplekse konjugerte løsninger.

La løsningene være r og $\bar{r}$.

Skriv r på polar form $r = \rho \cdot e^{i\theta}$

Da er generell løsning av differensligningen:

$$x_n = \rho^n (F \cos n\theta + E \sin n\theta) , \quad E, F \in \mathbb{R}$$