MAT-INF1100 Uke 1.

Kap. 1. Naturlige tall

Seksjon 1.1. Naturlige tall: $1, 2, 3, 4, \ldots$

Mengden av naturlige tall $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Hele tall $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Partallene: de som er delelig med 2: $2, 4, 6, \ldots$

Oddetallene: ikke delelig med 2: $1, 3, 5, 7, \ldots$

Summetegn

Eksempel 1 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$ kan skrives

som $\sum_{n=1}^{10} n^2$

Eksempel 2 $\sum_{n=1}^{22} (2n-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + 43$.

Definisjon: $\sum_{n=k}^{m} a_n = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{m-1} + a_m$. (*)

hvor $k \leq m$

n summasjonsindeks

k nedre summasjonsgrense

m øvre summasjonsgrense.

Eksempel: $1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{17} = \sum_{n=0}^{17} (-1)^n x^n$.

Merk: $x^1 = x$, $x^0 = 1$.

3 egenskaper til summetegnet

$$\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=k}^{m} b_n = \sum_{n=k}^{m} (a_n + b_n) \qquad (1)$$

$$\sum_{n=k}^{m} c\, a_n = c \sum_{n=k}^{m} a_n \qquad (2)$$

$$\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{l} a_n = \sum_{n=k}^{l} a_n \qquad (3)$$

Bevis for (1):

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=k}^{m} b_n &= (a_k + a_{k+1} + \dots + a_m) + (b_k + b_{k+1} + \dots + b_m) \\ &= (a_k + b_k) + (a_{k+1} + b_{k+1}) + \dots + (a_m + b_m) \\ &= \sum_{n=k}^{m} (a_n + b_n) . \qquad \square\end{aligned}$$

Skifte indeks

$$S = \sum_{k=-3}^{11} (-1)^k x^{k+3}$$ Kan vi forenkle det?

Innføre $i = k+3$, ny indeks.

Kan erstatte k med $i-3$

Nye grenser? k løper fra -3 til 11

i løper fra 0 til 14

Da er $$S = \sum_{i=0}^{14} (-1)^{i-3} x^i = \sum_{i=0}^{14} (-1)^i (-1)^{-3} x^i$$

$$= (-1)^{-3} \sum_{i=0}^{14} (-1)^i x^i = -\sum_{i=0}^{14} (-1)^i x^i$$

$$= -\left(1 - x + x^2 - \dots + x^{14}\right).$$

Eksempel

Oppgaver, Seks 1.1

3. Skriv summene uten summetegn og regn ut verdiene

a) $$\sum_{n=1}^{6} 2^n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$$
$$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$$
$$= 126$$

c) $$\sum_{n=0}^{5} \frac{2}{n+1} = 2 \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n+1} = 2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$$
$$= \frac{2}{60}\left(60 + 30 + 20 + 15 + 12 + 10\right)$$
$$= \frac{1}{30} \cdot 147 = \frac{1}{30}(21 \times 7) = \frac{7 \times 7}{10} = \frac{49}{10}$$
$$= 4{,}9 = 4.9$$
(norsk) (engelsk)