Uke 1. MAT-INF1100

Induksjon (Seksjon 1.2, Kalkulus)

La n være et naturlig tall, d.v.s. $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Vi kaller P_n et utsagn hvis P_n er enten

sant eller usant for n.

Eksempel $P_n : n > 3$

P_1	$1 > 3$	usant
P_2	$2 > 3$	usant
P_3	$3 > 3$	usant
P_4	$4 > 3$	sant

Eksempel P_n : $n+1$ er delelig med 3

P_1 : $1+1 = 2$, $\frac{2}{3}$ usant

P_2 : $2+1 = 3$, $\frac{3}{3} = 1$ sant.

Eksempel P_n: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$.

P_1 : V.S. $\sum_{i=1}^{1} i = 1$

H.S. $\frac{1}{2} 1 \cdot (1+1) = 1$ sant.

P_2 : V.S. $\sum_{i=1}^{2} i = 1+2 = 3$ sant

H.S. $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2+1) = 3$

P_3 : V.S. $\sum_{i=1}^{3} i = 1+2+3 = 6$ sant

H.S. $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (3+1) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$

Hvordan vise at P_n et sant for alle n ?

Induksjonsprinsippet

La P_n være et utsagn for alle naturlige tall n.
Anta videre at følgende to krav er oppfylt:

(i) P_1 er sant
(ii) Dersom P_k er sant for en vilkårlig $k \in \mathbb{N}$
så er P_{k+1} også sant.

Da er P_n sant for alle $n \in \mathbb{N}$.

Induksjonsbevis for $P_n: \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$.

(i) P_1 : V.S. $\sum_{i=1}^{1} i = 1$, H.S. $= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1$ Sant.

(ii) Anta at P_k er sant for en $k \in \mathbb{N}$. , d.v.s.,

antar at $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2} k(k+1)$. (*)

Vil vise at P_{k+1} er også sant

V.S. $\sum_{i=1}^{k+1} i = 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1)$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2} k(k+1) + (k+1)$$
$$= (k+1)\left(\frac{1}{2}k + 1\right)$$
$$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$
$$= \frac{1}{2}(k+1)((k+1)+1)$$

Ser at dette er H.S. i P_{k+1}.

Så V.S. = H.S. □

Oppgave 1.2.6

Vis at $n(n^2+5)$ er delelig med 6. for alle $n \in \mathbb{N}$.
Bruk induksjon. La P_n være utsagnet at
$n(n^2+5)$ er delelig med 6., for $n \in \mathbb{N}$.

(i) P_1 ? $1 \cdot (1^2+5) = 1+5 = 6$, ja delelig med 6,
P_1 er sant ✓

(ii) Anta at P_k er sant., altså $k(k^2+5)$ er delelig med 6. Vil vise at P_{k+1} er sant.

Se på $(k+1)((k+1)^2+5)$

$$= (k+1)(k^2+2k+1+5)$$
$$k(k^2+5) + k(2k+1) + k^2+2k+6$$
$$= k(k^2+5) + 3k^2+3k+6$$
$$= k(k^2+5) + 3k(k+1) + 6$$

Antagelsen at P_k er sant $\Rightarrow$ $k(k^2+5)$ er delelig med 6.
$k(k+1)$ er delelig med 2 (tenk: k er enten partall eller oddetall)
6 delelig med 6.

Da er P_{k+1} sant. ✓ $\square$.