Uke 2. Kapittel 2, Kalkulus. Reelle tall

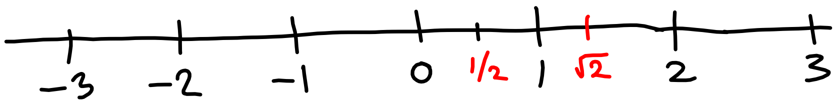
Naturlige tall $1, 2, 3, 4, \ldots$ $\mathbb{N}$

Hele tall $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ $\mathbb{Z}$

Rasjonale tall (brøker), $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. $\mathbb{Q}$

π, $\sqrt{2}$ er irrasjonale tall (ikke rasjonalt)

Reelle tall = rasjonale og irrasjonale, $\mathbb{R}$



Tallinjen

$\sqrt{2} \approx 1.4142\ldots$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$\subset$ "er en delmengde av"

Seksjon. 2.1 . Intervaller.

$\in$ = "er et medlem av"

Gitt $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Definer

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ lukket intervall

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ åpent intervall

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

Merk: $[a,a] = \{a\}$

$(a,a) = \emptyset$

Skriver også $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

$[0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x\}$

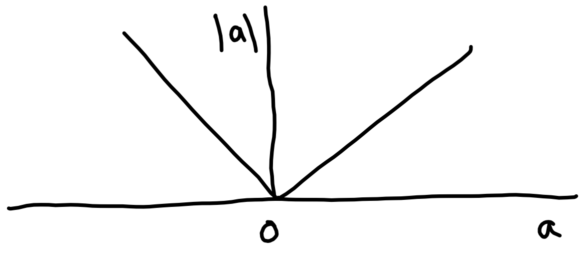
Trekantulikheten

Tallverdien av et reelt tall a er:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{hvis } a \geq 0 \\ -a & \text{hvis } a < 0 \end{cases}$$

Kalles også absoluttverdien. $|a| \geq 0$.

Merk også at $|a| = \max\{a, -a\}$



Trekantulikheten: For alle $a, b \in \mathbb{R}$,

gjelder $$|a+b| \leq |a| + |b|. \quad (*)$$

Bevis: Lett å se at $a \leq |a|$ og $-a \leq |a|$.

Nå kan se at (1) $a+b \leq |a| + |b|$

(2) $-(a+b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|$

$$\Rightarrow |a+b| = \max\{a+b, -(a+b)\} \leq |a| + |b|.$$

Eksempler:

$a = 2,\ b = 3$ $\quad |a+b| = 5 = |a| + |b|$ likhet

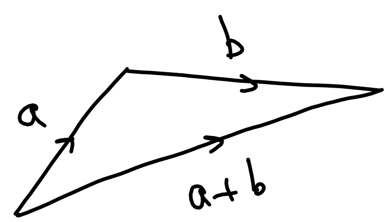
$a = 2,\ b = -3$ $\quad |a+b| = |-1| = 1$, $|a|+|b| = 5$ ulikhet

$a = -2,\ b = -3$ $\quad |a+b| = |-5| = 5$

$|a| + |b| = |-2| + |-3| = 2 + 3 = 5$

Hvis a, b har samme fortegn, likhet
motsatt ulikhet

Komplekse eller vektorer, a, b,



$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Seksjon 2.2 $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$

Et tall som ikke er rasjonalt er "irrasjonalt"

Setning 2.2.1 Hvis x, y er rasjonale tall,

$x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$ $(\neq y \neq 0)$ er rasjonale tall.

Hvorfor? Se på $x+y$. Anta at $x = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$ og $y = \frac{c}{d}$, $d \neq 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Da er $x+y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$,

$bd \neq 0$, da er $x+y$ et rasjonalt tall.

Skal vise at $\sqrt{2}$ er irrasjonalt.

<u>Lemma</u> Dersom $a \in \mathbb{N}$ er et oddetall så er a^2 også et oddetall.

<u>Bevis</u> Siden a er et oddetall, kan vi skrive a på formen $a = 2n-1$, hvor $n \in \mathbb{N}$. Da er

$$a^2 = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$$
$$= 4n(n-1) + 1$$

Ser at $4n(n-1)$ er delelig med 2, eller er et partall. Da er a^2 et oddetall. $\square$

<u>Teorem</u>. $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

<u>Bevis</u> Anta det motsatte, d.v.s. at $\sqrt{2}$ er et rasjonalt tall. Da er $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, (*)

$a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Kan anta at ikke både a og b er partall (hvis ikke kunne vi dele både a og b med 2 og gjenta hvis nødvendig)

Nå kvadrere (*), $2 = \frac{a^2}{b^2}$

$\Rightarrow \quad 2b^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad a^2$ er et partall. $\Rightarrow$ a er et partall (Lemma 2.2.3)

$\Rightarrow$ det finnes $n \in \mathbb{N}$ slik at $a = 2n$

$\Rightarrow \quad 2b^2 = (2n)^2 = 4n^2$

$\Rightarrow \quad b^2 = 2n^2$

$\Rightarrow \quad b^2$ er et partall

$\Rightarrow \quad b$ er et partall (Lemma 2.2.3)

$\Rightarrow$ både a og b er partall

Selvmotsigelse. $\square$

Det er flere irrasjonale tall,
for eksempel $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+1$

Teorem : Hvis x er irrasjonalt og y er rasjonalt
er $x+y$ irrasjonalt.

Bevis Anta det motsatte, d.v.s. at
$x+y=a$ er rasjonalt.
Da er $x=a-y$, og a, y er rasjonale,
da må x være rasjonalt. Selvmotsigelse
a må være irrasjonalt. $\blacksquare$

Summen av to irrasjonale tall ?

Ek1. $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ irrasjonalt.

Ek2 $\sqrt{5}+(1-\sqrt{5})=1$ rasjonalt

Ek3 $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}-\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)}\frac{(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)}-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{5+2\sqrt{5}+1}{5-1}-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{6}{4}$$

$$= \frac{3}{2}$$ rasjonalt.

Et "komplisert" uttrykk kan være et enkelt tall.