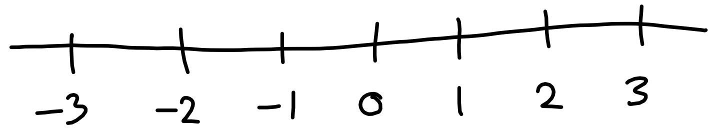
Kapittel 2. Reelle tall.

Seksjon 2.2.

Tallinjen



Rasjonale tall: $\frac{a}{b}$, $a,b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

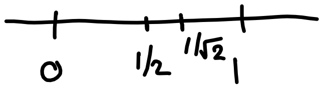
irrasjonalt tall: et tall som ikke er rasjonalt.

$1/2$ rasjonalt, $\sqrt{2}$ er irrasjonalt.

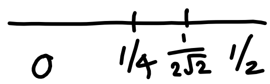
Skal vise at ethvert åpent intervall inneholder minst et rasjonalt tall og et irrasjonalt tall.

Kunne se på $(0,1)$. $\frac{1}{2}$ rasjonalt, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ irrasjonalt

$(0,1)$ ok.



$(0,1/2)$?



Men vi kan ikke bruke samme argument for alle $(0,b)$

Arkimedes Prinsipp

(i) For ethvert reelt tall a finnes det et naturlig tall n som er ~~støre~~ større enn a.

(ii) For ethvert positivt reelt tall b finnes det et naturlig tall m slik at $\frac{1}{m}$ er mindre enn b.

Bevis (i) Anta at $a < 1$. Da velge $n = 1$

Ellers er $a \geq 1$. Se på desimalformen av a

Fjern alle siffrene etter desimalpunktet og plusse med 1 for å definere n.

(eksempel: $a = 3.214$, $n = 4$).

(ii) Fra (i) kan vi finne naturlig tall m slik at $m > \frac{1}{b}$. Da er $\frac{1}{m} < b$. $\square$

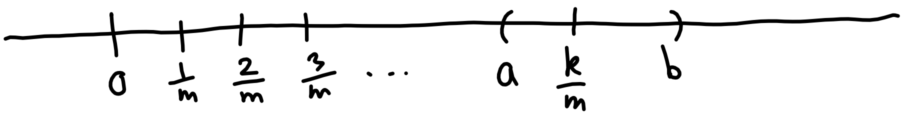
<u>Setning</u> Ethvert åpent intervall (a,b), hvor $a, b \in \mathbb{R}$, inneholder både rasjonale og irrasjonale tall. (og anta at $a < b$).

(Husk $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$)

<u>Bevis</u> Først finn et rasjonalt tall.

Se at $b - a$ er et positivt reelt tall (fordi $a<b$)

Fra Arkimedes Prinsipp (ii) finnes det $m \in \mathbb{N}$ slik at $\frac{1}{m} < b - a$.



Vi skal vise at det finnes $k \in \mathbb{Z}$ slik at $a < \frac{k}{m} < b$

La k være det minste helltall som er større enn am. Da har vi $\boxed{\frac{k}{m} > a}$

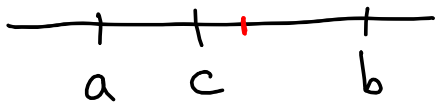
Samtidig er $k-1 \leq am$ (fordi k er det minste større enn am). Da er $\frac{k-1}{m} \leq a$

Da er $$\frac{k}{m} = \frac{k-1}{m} + \frac{1}{m} \leq a + \frac{1}{m} < a + (b-a) = b.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{k}{m} < b.}$$

Nå finne et irrasjonalt tall i (a,b).

La $c = \frac{k}{m}$



Ønsker å finne et irrasjonalt tall mellom c og b.

Skal vise at $c + \frac{\sqrt{2}}{p} < b$ hvor $p \in \mathbb{N}$

og hvis p er stor nok.

Fra Arkimedes Prinsipp (ii) finnes det

$p \in \mathbb{N}$ slik at $\frac{1}{p} < \frac{b-c}{\sqrt{2}}$

Dette er ekvivalent med $\frac{\sqrt{2}}{p} < b-c \iff c+\frac{\sqrt{2}}{p} < b$.

Da er $c+\frac{\sqrt{2}}{p}$ irrasjonalt og mellom a og b.