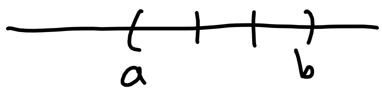
Uke 2 Reelle tall.

Onsdag: ethvert åpent intervall (a, b) (ikke-tom) inneholder både rasjonale og irrasjonale tall.



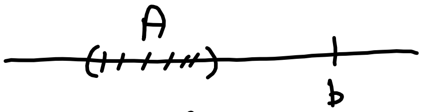
2.3. Kompletthet av de reelle tallene

$$x^2 - 2 = 0 \qquad \text{Svar} \quad x = \sqrt{2} \text{ eller } -\sqrt{2}$$

Så vi kan ikke løse denne ligningen i tallsystemet $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ har "hull"

Kompletthetsprinsippet (for $\mathbb{R}$)

En delmengde A av $\mathbb{R}$ kalles oppad begrenset hvis det finnes et tall b slik at $b \geq x$ for alle $x \in A$.



Da kalles b en øvre skranke for A.
b kalles den minste øvre skranke for A hvis b er mindre enn alle andre øvre skranker.
Den minste øvre skranke skrives $\sup(A)$.

Eks. $A = [0, 10]$ Da er $\sup(A) = 10$
$A = (0, 10)$ Da er $\sup(A) = 10$

Kompletthetsprinsippet (for $\mathbb{R}$):

Enhver ikke-tom oppad begrenset delmengde A av $\mathbb{R}$ har en minst øvre skranke.

Eks. La $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x^2 < 2\}$.

Da er $\sup(A) = \sqrt{2}$

Dette eksemplet viser at prinsippet gjelder ikke for $\mathbb{Q}$.

Seks. 2.4 Kalkulus

$\mathbb{R}$ kan beskrives med 11 aksiomer.

6 aksiomer algebra
4 aksiomer ulikheter
1 kompletthetsprinsippet.

Hva er ~~et~~ reelt tall ?

Et reelt er ~~et~~ desimaltall med

uendelig mange sifre.

3.140000.....

0.000000...

$\frac{1}{2} = 0.500000\ldots$

$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$

$\frac{1}{7} = 0.14285714285714\ldots$

$\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$

Desimalene i ~~et~~ rasjonalt tall gjentar seg.

Desimalene i ~~et~~ irrasjonalt tall gjentar seg ikke

Er $0.33333\ldots$ virkelig lik $\frac{1}{3}$?

Ja, fordi

$$0.3333\ldots = 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + \cdots$$
$$= 3 \cdot 10^{-1}\left(1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \cdots\right)$$
$$= 3 \cdot 10^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n}$$

Husk at $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$

Her har vi $x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

Da er $0.3333\ldots = 3 \cdot 10^{-1} \dfrac{1}{1 - 1/10}$

$$= 3 \cdot \frac{1}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{9} = \frac{1}{3}$$

1 kan skrives $1.0000\ldots$

eller $0.9999\ldots$

(noen tall har ikke en entydig representasjon)

Desimal representasjon:

$$328 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Totallsystemet:

$$1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$= 8 + 2 + 1 = 11$$

$$17 = 17_{10} = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^0 = 10001_2 .$$

Hvorfor bruke totallsystemet i ~~data~~ datamaskiner.

: fordi det er mer robust.

Ukeoppgaver.

Seks. 1.1. 5b) Skriv summen ved hjelp av summetegn:

$$5+7+9+11+13 = \sum_{i=1}^{5}(2i+3)$$

6(b) Fyll inn boksen!

$$\sum_{n=-2}^{4}(n+2)\cdot 3^{n} = \sum_{k=0}^{6} \boxed{((k-2)+2)\cdot 3^{k-2}} = k\cdot 3^{k-2}$$

Ser at $k = n+2 \iff n = k-2$

Seks. 1.2. Induksjon

(2) Vis ved induksjon at

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

La P_n være utsagnet at dette stemmer for alle $n \geq 1$.

(i) P_1? V.S. $= \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$

H.S. $= \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6} = \frac{1.2.3}{6} = 1$

P_1 er sant ✓

(ii) Anta at P_k er sant, d.v.s. $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (*)

Må vise at P_{k+1} er sant, d.v.s.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \quad (**)$$

V.S. i (**) $= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$

$$\overset{(P_k)}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)}{6}\left(k(2k+1) + 6(k+1)\right)$$

$$= \frac{k+1}{6}\left(2k^2 + 7k + 6\right)$$

$$= \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3) = H.S.$$

Da er P_{k+1} sant. Bevis er ferdig.

Seks. 1.4.

3 (c). Regn ut $(1+\sqrt{2})^4$.

Binomialteoremet ? $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$

Spesialtilfeller bruk Pascals trekant

Her er $n = 4$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Da er $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

La $a = 1$, $b = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{2})^4 &= 1 + 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2}^2 + 4\sqrt{2}^3 + \sqrt{2}^4 \\ &= 1 + 4\sqrt{2} + 12 + 8\sqrt{2} + 4 \\ &= 17 + 12\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ekstra oppgave.

$$P_n: \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} i^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 1.$$

(i) P_1: V.S. $(-1)^{1+1} 1^2 = 1$. H.S. $(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \frac{(1+1)}{2} = 1$.

P_1 sant.

(ii) Anta P_k er sant $\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} i^2 = (-1)^{k+1} \frac{k(k+1)}{2}$

Må vise $\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} i^2 = (-1)^{k+2} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

$$V.S. = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} i^2 + (-1)^{k+2} (k+1)^2$$

$$\overset{(P_k)}{=} (-1)^{k+1} \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^{k+2} (k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)(-1)^{k+2}}{2} \left(\underbrace{(-1)^{-1}}_{=-1} k + 2(k+1) \right)$$

$(-1)^{-1} = \frac{1}{(-1)} = -1$

$$= \frac{(k+1)(-1)^{k+2}}{2} (k+2)$$

P_{k+1} sant.