Uke 3. Representasjon av tall i ulik siffersystemer — Kompendiet kap. 3.1.

Notasjon: Hvis a og b er heltall angir $a\,//\,b$ heltallsdelen når a divideres med b, og $a\,\%\,b$ angir resten i divisjonen.

Eks. $3\,//\,2 = 1$, $3\,\%\,2 = 1$

$25\,//\,7 = 3$, $25\,\%\,7 = 4$.

Ser at $25 = 3 \cdot 7 + 4$

$$2328 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

$$3761 = 13662_7 = 1 \cdot 7^4 + 3 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0$$

$$101_7 = 1 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0 = 49 + 1 = 50$$

Grunntall β der β er et naturlig tall, $\beta > 1$. Da trenger vi sifrene

$$n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{\beta-1}$$

Vanligvis velger vi $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, .., $n_9 = 9$,
$n_{10} = A$, $n_{11} = B$, ... $n_{15} = F$

Et naturlig tall i β-systemet er en ordnet samling av sifre

$$(d_k \, d_{k-1} \, d_{k-2} \cdots d_0)_\beta \quad \text{hvor}$$

d_i er et av sifrene $n_0, n_1, .., n_{\beta-1}$
og dette tolkes som $d_k \beta^k + d_{k-1} \beta^{k-1} + \ldots + d_1 \beta^1 + d_0 \beta^0$.

Konvertering fra 10-tallsystemet til 8-tallsystemet.

Eksempel: Konverter 3761. La $\beta = 8$.
Anta at vi vet at vi trenger 4 sifre.
Må finne d_0, d_1, d_2, d_3 slik at

$$3761 = d_3 8^3 + d_2 8^2 + d_1 8 + d_0$$

Da er $3761 = (d_3 d_2 d_1 d_0)_8$.

Kan skrive $3761 = (d_3 8^2 + d_2 8 + d_1) \cdot 8 + d_0$

Da ser vi at $3761 // 8 = d_3 8^2 + d_2 8 + d_1$ (*)
$3761 \% 8 = d_0$

Da er $d_0 = 3761 \% 8$

Gjenta: $3761 // 8 = 470$

Da er $470 = d_3 8^2 + d_2 8 + d_1$

Dividere med 8 : $470 \% 8 = d_1$

$470 // 8 = 58$, $d_1 = 6$

$58 = d_3 8 + d_2$

$d_2 = 58 \% 8 = 2$
$58 // 8 = 7 = d_3$

$$3761 = 7261_8$$

Tabell notasjon.

	3761	1	% 8
//8	470	6	% 8
//8	58	2	% 8
//8	7	7	% 8

Generell β. Konvertere et naturlig tall a til β-systemet. d.v.s. finne $(d_k d_{k-1} \ldots d_1 d_0)_\beta$.

$a_0 = a$
for $i = 0, 1, \ldots, k$
$\quad d_i = a_i \% \beta$
$\quad a_{i+1} = a_i // \beta$

Bedre versjon:

$i = 0$
while $a > 0$
$\quad d_i = a \% \beta$
$\quad a = a // \beta$
$\quad i = i+1$

Siste versjon

while $a > 0$
$\quad d = a \% \beta$
$\quad a = a // \beta$
$\quad$ print(d)

Dette gir $d_0, d_1, d_2, \ldots$

Hva med tall i intervallet $(0,1)$?

Eksempel. $0{,}5_{10} = 5 \cdot 10^{-1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$0{,}25_{10} = 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \dots = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{3} = 0{,}3333\dots_{10}$

Generelt, vilkårlig β. Et tall i $(0,1)$ kan skrives i β-siffersystemet ved $(0, d_{-1} d_{-2} d_{-3} \dots)_\beta$

Tolkes som

$$d_{-1}\beta^{-1} + d_{-2}\beta^{-2} + d_{-3}\beta^{-3} + \dots$$

Tallet 1 ? Hvis alle sifrene er $d_{-1} = \beta - 1$, $d_{-2} = \beta - 1, \dots$ får vi

$$(\beta-1)\beta^{-1} + (\beta-1)\beta^{-2} + (\beta-1)\beta^{-3} + \dots$$

$$= (\beta-1)\beta^{-1}\left(1 + \beta^{-1} + \beta^{-2} + \dots\right)$$

$$= (\beta-1)\beta^{-1}\frac{1}{1-\beta^{-1}}$$

$$= \frac{(\beta-1)}{\beta} \cdot \frac{1}{1-1/\beta} = \frac{(\beta-1)}{\beta}\frac{\beta}{\beta-1} = 1$$

Eks. $0{,}9999\dots_{10} = 1 = 1{,}000\dots_{10}$

$0{,}8888\dots_9 = 1 = 1{,}00\dots_9$

Eks. $3{,}140000\dots_{10} = 3{,}139999\dots_{10}$

<u>Teorem</u> Ethvert reelt tall i $(0,1)$ kan representeres unikt som et desimaltall i β-systemet ($\beta \in \mathbb{N}$, $\beta > 1$) gitt at alle representasjoner som ender med uendelig mange sifre, hvor alle sifrene er lik $\beta - 1$, ikke tillates.

Konvertering av brøker til β-systemet.

Skriv $\frac{1}{5}$ i 8-tallsystemet.

$$\frac{1}{5} = d_{-1} 8^{-1} + d_{-2} 8^{-2} + d_{-3} 8^{-3} + \dots \quad \Big| \cdot 8$$

$$d_{-1}=1 \quad \frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5} = d_{-1} + d_{-2} 8^{-1} + d_{-3} 8^{-2} + \dots$$

$$\frac{3}{5} = d_{-2} 8^{-1} + d_{-3} 8^{-2} + d_{-4} 8^{-3} + \dots \quad \Big| \cdot 8$$

$$d_{-2}=4 \quad \frac{24}{5} = 4 + \frac{4}{5} = d_{-2} + d_{-3} 8^{-1} + d_{-4} 8^{-2} + \dots$$

$$\frac{4}{5} = d_{-3} 8^{-1} + d_{-4} 8^{-2} + \dots$$

$\frac{2}{5}$

$\frac{1}{5}$

Finner vi at $\frac{1}{5} = 0{,}1463\,1463\,1463$

Ser at sifrene gjentar seg for et rasjonelt tall a/b i $(0,1)$.

Algoritme 3.20.

La $a = \frac{b}{c}$ være et rasjonalt tall i $(0,1)$.

De første k sifre i β-siffersystemet kan da regnes som

for $i = -1, -2, \dots, -k$,

$$d_i = (b \cdot \beta) // c$$

$$b = (b \cdot \beta) \% c$$