Kap 3. Tallsystemer

Representasjon av tall i tallsystemer med grunntall β.

Eks

$14_{10} = 16_8 = 1 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 14$

$223_7 = 2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0 = \dots = 115_{10}$

$0.001_2 = 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 0{,}125_{10}$

$d_2 d_1 d_0 , d_{-1} d_{-2}{}_\beta$

$d_2 \cdot \beta^2 + d_1 \cdot \beta^1 + d_0 \cdot \beta^0 + d_{-1} \cdot \beta^{-1} + d_{-2} \cdot \beta^{-2}$

$d_i \in \{0, 1, \dots, \beta - 1\}$.

16-tallsystemet

$a_{16} = 10$ $\quad$ $d_{16} = 13$

$b_{16} = 11$ $\quad$ $e_{16} = 14$

$c_{16} = 12$ $\quad$ $f_{16} = 15$

$$af1_{16} = 10\cdot16^2 + 15\cdot16^1 + 1\cdot16^0 = 2801$$

8 4 2 1

$a_{16} = 10_{10} = 1010$

$f_{16} = 15_{10} = 1111$

$1_{16} = 1_{10} = 0001$

11 10 9 8 $\quad$ 7 6 5 4 $\quad$ 3 2 1 0

$$1010\;1111\;0001_2 = af1_{16}$$

$$1\cdot2^{11} + 1\cdot2^9 + 1\cdot2^7 + 1\cdot2^6 + 1\cdot2^5 + 1\cdot2^4 + 1\cdot2^0$$

$$(1\cdot2^3 + 1\cdot2^1)\cdot2^8 + (1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0)\cdot2^4 + 1\cdot2^0$$

$$10\cdot16^2 + 15\cdot16 + 1\cdot16^0 = af1_{16}$$

Rasjonale tall i (0,1)

$$\frac{1}{5} = 0{,}1_5 = 1 \cdot 5^{-1}$$

$$\frac{1}{5} = 0{,}1463\ 1463\ 1463\ldots_8$$

$$\frac{87}{98} = 0{,}61\ 333333\ldots_7$$

Algoritme

$a = \frac{b}{c} \in (0,1)$

for $k = -1, -2, \ldots, -5$

$d_k = (b \cdot \beta) // c$

$b = (b \cdot \beta) \% c$

Hva er $\frac{1}{10}$ i 2-tallsystemet

$(b \cdot \beta) // c \qquad (b \cdot 2) // 10$

$(b \cdot 2) \% 10$		d_i	
	$\frac{1}{10}$	0	$(1 \cdot 2) // 10$
$b = (1 \cdot 2) \% 10$	$\frac{2}{10}$	0	$(2 \cdot 2) // 10$
$b = (2 \cdot 2) \% 10$	$\frac{4}{10}$	0	$(4 \cdot 2) // 10$
$b = (4 \cdot 2) \% 10$	$\frac{8}{10}$	1	$(8 \cdot 2) // 10$
	$\frac{6}{10}$	1	$(6 \cdot 2) // 10$
	$\frac{2}{10}$	0	

$$\frac{1}{10} = 0\ 0011\ 0011\ 0011\ldots_2$$

Lemma 3.2.1

La $a \in (0,1)$. Da vil siffrene til a i tallsystemet β gjenta seg dvs.

$$a = (0,d_{-1} \cdots d_{-i}\, d_{-(i+1)} \cdots d_{-(i+m)}\, d_{-(i+1)} \cdots d_{-(i+m)}\, d_{-(i+1)} \cdots)_\beta$$

hvis og bare hvis a er et rasjonalt tall.

(spesielt betyr det at hvis a er et irrasjonalt tall, så vil ikke sifrene gjenta seg i et bestemt system).

I eksemplene over ser vi at hvis a er rasjonalt så vil siffrene gjenta seg.

I oppgave 3.3.7 skal vi vise at hvis siffrene gjentar seg så er a rasjonal.

Lemma

Et rasjonalt tall $a = \frac{b}{c} \in (0,1)$ kan skrives med en endelig sifferutvikling

$$a = (0,d_1 \dots d_k)_\beta$$

i tallsystemet β hvis alle primtallsfaktorene i c deler β.

Dvs. Hvis $c = p_1 \cdots p_r$ er en primtallsfaktorisering av c så må $\frac{\beta}{p_i} \in \mathbb{N}$ for $i = 1, \dots, r$ hvis a skal ha en endelig sifferutvikling.

Bevis ved eksempel

Skal skrive $\frac{8}{9}$ i 6-tallsystemet.

Primtallsfaktorisering av $9 = 3 \cdot 3$ Har $\beta = 6$

$$\frac{6}{3} = 2 \in \mathbb{N}$$

$$\frac{8}{9} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 2}{9 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{32}{6 \cdot 6} = \frac{5 \cdot 6 + 2}{6 \cdot 6} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6^2} = 0{,}52_6$$

Aritmetikk i tallsystemer

Addisjon

$$5_8 + 6_8 = (5+6)_{10} = 11_{10} = 8+3 = 13_8$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{4}\,\overset{1}{5}\,7_8 \\ +\ 3\,2\,5_8 \\ \hline =1\,0\,0\,4_8 \end{array}$$

Subtraksjon

$$\begin{array}{r} 3\,\overset{8}{2}\,\overset{8}{1}_8 \\ -\ 1\,7\,7_8 \\ \hline =1\,2\,2_8 \end{array}$$

Multiplikasjon

Gangetabellen i 4-tallsystemet

	1	2	3
1	1	2	3
2	2	10	12
3	3	12	21

$$\begin{array}{r} 3\,\overset{1}{1}\,2_4 \times 12_4 \\ \hline 1\,2\,3\,0 \\ +\quad 3\,1\,2 \\ \hline =\ 1\,1\,0\,1\,0_4 \end{array}$$

Oppgave 3.3.7

Vis at dersom sifrene til et tall i $(0,1)$ forekommer i repeterende sekvenser, så er tallet rasjonalt.

Bevis

La $\beta \geq 2$. Vi er gitt

$$a = 0,d_{-1}\dots d_{-i}\,d_{-(i+1)}\cdots d_{-(i+m)}\,d_{-(i+1)}\cdots d_{-(i+m)}\,d_{-(i+1)}\cdots{}_{\beta}$$

så lengden på den repeterende sekvensen er m

og $d_{-(k+1)} = d_{-(k+1+m)}$ for $k \geq i$

Da har vi

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} d_{-k}\beta^{-k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{i} d_{-k}\beta^{-k}}_{M} + \sum_{k=i+1}^{\infty} d_{-k}\beta^{-k}$$

$$= M + \sum_{s=0}^{\infty}\left(d_{-(i+1+sm)}\beta^{-(i+1+sm)} + \dots + d_{-(i+m+sm)}\beta^{-(i+m+sm)}\right)$$

$$= M + \sum_{s=0}^{\infty}\left(d_{-(i+1)}\beta^{-(i+1+sm)} + \dots + d_{-(i+m)}\beta^{-(i+m+sm)}\right)$$

$$= M + \sum_{s=0}^{\infty}\beta^{-sm}\underbrace{\left(d_{-(i+1)}\beta^{-(i+1)} + \dots + d_{-(i+m)}\beta^{-(i+m)}\right)}_{N}$$

$$= M + \sum_{s=0}^{\infty} N(\beta^{-m})^{s}$$

setning 12.1.1 i kalkulus

$$\sum_{s=0}^{\infty} r^s N = \frac{N}{1-r}$$

for $|r|<1$

$$= M + \frac{N}{1-\beta^{-m}} = M + \frac{N\beta^{m}}{\beta^{m}-1}$$

Siden M og N er endelige summer med rasjonale tall er M og N rasjonale.

Da er $M + \dfrac{N\cdot\beta^{m}}{\beta^{m}-1}$ rasjonal $\square$