Uke 5. Differensligninger

Homogene annen ordens ligninger:

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$$

Kan prøve $x_n = r^n$:

$$r^{n+2} + b r^{n+1} + c r^n = 0$$

$$r^n (r^2 + br + c) = 0$$

$\Rightarrow$ $r^2 + br + c = 0$

Karakteristiske ligningen.

To røtter, r_1, r_2.

$\Rightarrow$ r_1^n er en løsning, r_2^n er en løsning

Generelle løsningen er

$$x_n = C r_1^n + D r_2^n.$$

Må sjekke 3 tilfeller:

(i) $r_1 \neq r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

(ii) $r_1 = r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

(iii) $r_2 = \bar{r}_1$, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$.

Tilfelle (i) 2 forskjellige reelle røtter.

Eksempel. Fibonacci-tallene : $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Husk $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 5, \ldots$

$$\Rightarrow \quad x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$$

k.l. $\quad r^2 - r - 1 = 0$

$$r = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-1)(1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Vi er i tilfelle (i). $\quad r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$x_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Initial betingelser :

$$n=1, \quad 1 = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \qquad (1)$$

$$n=2, \quad 1 = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= C\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) + D\left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)$$

$$1 = C\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \qquad (2)$$

Ser at $C = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $D = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Løsningen er $\quad x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$

Tilfelle (ii) Anta at polynomet r^2+br+c har bare en rot r_1. Da er den generelle løsningen til

$$x_{n+2}+b\,x_{n+1}+c\,x_n=0$$

gitt ved $\boxed{x_n = C r_1^n + D n r_1^n}$.

Hvorfor? K.l. må ha formen $(r-r_1)^2=0$

d.v.s. $r^2-2r_1 r+r_1^2=0$

Da må ligningen være $x_{n+2}-2r_1 x_{n+1}+r_1^2 x_n=0$ (*)

Nå ser vi at $x_n=r_1^n$ er en løsning.

Hva med $x_n = n r_1^n$?

V.S. (*) : $(n+2)r_1^{n+2}-2r_1\left((n+1)r_1^{n+1}\right)+r_1^2\left(n r_1^n\right)$

$= r_1^{n+2}\left(n+2-2(n+1)+n\right) = 0 = \text{H.S.}$

Eksempel. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$

$x_0 = 1,\ x_1 = 8.$

K.l. $r^2 - 4r + 4 = 0$

$\Rightarrow (r-2)^2 = 0$ (*)

En rot, $r_1 = 2$,

$$x_n = C\,2^n + D\,n\,2^n.$$

Initial beting.: $n=0$: $1 = C + 0 \Rightarrow C = 1.$

$n=1$: $8 = 2C + 2D$

$8 = 2 + 2D$

$\Rightarrow D = 3.$

$$\Rightarrow x_n = 2^n + 3n\,2^n = (1+3n)2^n.$$

Tilfelle (iii). komplekskonjugerte røtter $r, \bar{r}$

k.l. $r^2 + br + c = 0 \Rightarrow r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$

Anta at $b^2 - 4c < 0$.

Røttene er distinkte og derfor er den generelle komplekse løsningen

$$x_n = C r^n + D \bar{r}^n. \quad (1)$$

C, D kan være komplekse.

Ønsker å forenkle formelen.

Vi vet at x_n er reell. Betyr $\overline{x_n} = x_n$

Men: $\overline{x_n} = \bar{C} \bar{r}^n + \bar{D} r^n \quad (2)$

H.S (1) = H.S. (2) Sammenlign koeffisienter:

Ser at $C = \bar{D}$, $D = \bar{C}$

Den generelle reelle løsningen er da

$$x_n = C r^n + \bar{C} (\bar{r})^n.$$

For å bli kvitt komplekse tall, bruk polarformen til r, d.v.s. $\boxed{r = \rho e^{i\theta}}$.

Bruk kartesformen av C, $\boxed{C = A + iB}$.

$$\Rightarrow x_n = (A+iB)\rho^n e^{ni\theta} + (A-iB)\rho^n e^{-ni\theta}.$$

$$= (A+iB)\rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + (A-iB)\rho^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)).$$

$$= \rho^n\left[2A\cos(n\theta) + 2Bi^2\sin(n\theta)\right]$$

$$\boxed{x_n = \rho^n\left[E\cos(n\theta) + F\sin(n\theta)\right],}$$

hvor $E = 2A$, $F = -2B$.

E, F vilkarlige konstanter og $r = \rho e^{i\theta}$.

Eksempel. $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

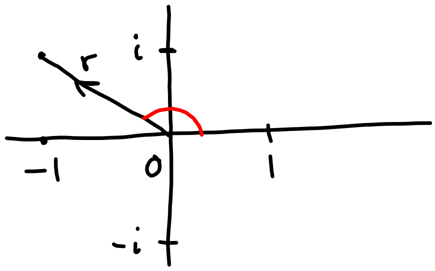
Kar. lig. $r^2 + 2r + 2 = 0$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.2.1}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$$

Tilfelle (iii) La $r = -1 + i$ $(\bar{r} = -1 - i)$

Uttrykk r i polar form:

$\mathbb{C}$



$r = \rho e^{i\theta}$? $\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$\theta = \frac{3\pi}{4}$.

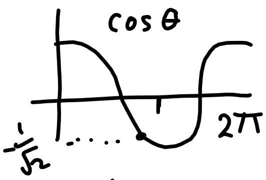
$$x_n = \rho^n \left[E \cos(n\theta) + F \sin(n\theta)\right]$$

$$= \sqrt{2}^n \left[E \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + F \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right].$$

Initialbetingelsene $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

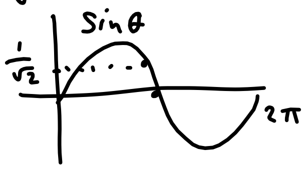
$n = 0 \Rightarrow 1 = E.1 + F.0 \Rightarrow E = 1$.

$n = 1 \Rightarrow 2 = \sqrt{2}\left[E \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + F \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$



$2 = \sqrt{2}\left[E\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$

$2 = -E + F$



$2 = -1 + F \Rightarrow F = 3$.

$$x_n = \sqrt{2}^n \left[\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + 3 \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right].$$

Oppgave 4.1.13. Smittsom sykdom.

(a) Av de som er syke en uke er 25% syke uken etter. En person som var syk for 2 uker siden vil i gjennomsnitt smitte $\frac{5}{4}$ personer denne uken. La x_n være antall syke personer i uke n. Da vil

$$x_n = \frac{1}{4} x_{n-1} + \frac{5}{4} x_{n-2}$$

(b) Første uke er 190 syke
Andre uke 260 syke.

Løse numerisk:

$x_0 = 190$, $x_1 = 260$ Velg N, eks. $N = 10, 20$.

for $i = 2, 3, \dots, N$

beregn $x_i = \frac{1}{4} x_{i-1} + \frac{5}{4} x_{i-2}$.

Python?

```
xpp = 190
xp  = 260
for i in range(20) :
    x = xp/4 + xpp*5/4
    print(x)
    xpp = xp
    xp = x
```