Uke 6. Mer på differensligninger

Hadde en modell:

$$x_n = \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{5}{4}x_{n-2},$$

x_n = antall personer som er syk, i uke n.

Initialbetingelser : $x_0 = 190$, $x_1 = 260$

Kan løse analytisk:

$$x_{n+2} - \frac{1}{4}x_{n+1} - \frac{5}{4}x_n = 0$$

Kar. ligning: $r^2 - \frac{1}{4}r - \frac{5}{4} = 0$

eller: $4r^2 - r - 5 = 0$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-5)(4)}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{1 \pm 9}{8}$$

$r_1 = -1$, $r_2 = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

Generelle løsningen er $x_n = C(-1)^n + D\left(\frac{5}{4}\right)^n$.

I.b. $n = 0$, $190 = C + D$ (1)

$n = 1$, $260 = -C + \frac{5}{4}D$. (2)

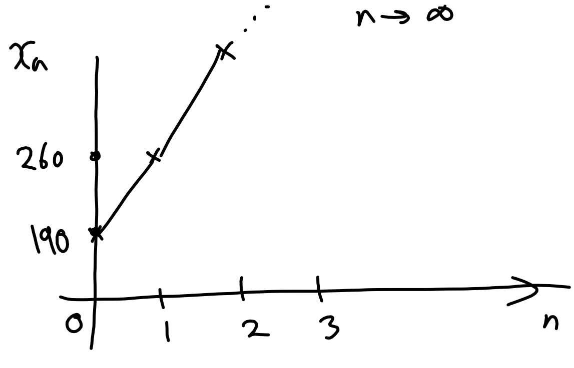
$450 = 0 + \frac{9}{4}D$

$\Rightarrow D = 200$. $\Rightarrow C = -10$.

Da er $x_n = -10(-1)^n + 200\left(\frac{5}{4}\right)^n$.

$\left|\frac{5}{4}\right| > 1$. Ser at x_n vil vokse eksponensielt når $n \to \infty$.

Kan si at $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$.



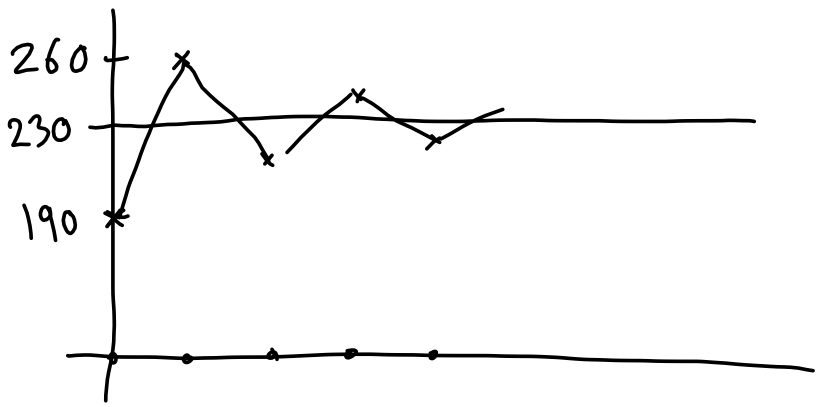
(C) Finner ut at sykdommen er mindre smittsom,
En person smitter gjennomsnittlig $\frac{3}{4}$ andre.

Ny ligning: $x_{n+2} - \frac{1}{4}x_{n+1} - \frac{3}{4}x_n = 0$

Gen. løsning $x_n = C + D\left(-\frac{3}{4}\right)^n$
$\left(r_1 = 1,\ r_2 = -\frac{3}{4}\right)$.

Med Ini. Bet: $x_n = 230 - 40\left(-\frac{3}{4}\right)^n$.

Nå, $\lim_{n\to\infty} x_n = 230$ $\left|-\frac{3}{4}\right| < 1$



Inhomogene differensligninger

Har en ligning på formen

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f(n) \quad , b,c \in \mathbb{R},$$

eller $\quad x_{n+1} + rx_n = f(n)$

Lemma Hvis x_n^p er en løsning er alle løsninger på formen

$$x_n = x_n^p + x_n^h$$

der x_n^h er en vilkårlig løsning av den homogene ligningen $(f(n) = 0)$.

p = "partikulær"
h = "homogen"

Eksempel. Spare penger: vi $x_0 = 1000$ kr. 1% rente. Setter in 100kr hvert år.

$$x_{n+1} = x_n + 0.01x_n + 100$$

$$x_{n+1} - 1.01x_n = 100, \qquad x_0 = 1000.$$

Homogene: $\quad x_{n+1} - 1.01x_n = 0$

$$r = 1.01 \Rightarrow x_n = C(1.01)^n$$

Høyre siden er $= 100$. Så prøv å finne en partikulær løsning på formen $x_n^p = A$.

$$x_{n+1}^p - 1.01x_n^p = 100$$

$$\Rightarrow A - 1.01A = 100$$

$$-0.01A = 100 \Rightarrow A = -10000.$$

Da er den generelle løsningen

$$x_n = x_n^p + x_n^h = -10000 + C(1.01)^n.$$

Initial. beting.: $\quad x_0 = 1000.$

$$\Rightarrow 1000 = -10000 + C \Rightarrow C = 11000.$$

Løsningen: $\quad x_n = -10000 + 11000(1.01)^n.$

Tommeregelen er å prøve å finne en partikulær løsning x_n^p som har samme form som $f(n)$.

<u>Eksempel</u>: Høyresiden er et polynom i n av grad k. : prøve å sette x_n^p til å være et polynom av grad k.

<u>Eksempel</u>. $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = -6n + 1$. (*)

(i) Homogene ligning : $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0$

k.l. $r^2 - r - 6 = 0 \Rightarrow (r+2)(r-3) = 0$

$r_1 = -2,\ r_2 = 3 \Rightarrow x_n^h = C(-2)^n + D\,3^n$.

(ii) H.S. er lineært i n. Prøve med $x_n^p = \underline{An + B}$.

V.S. $x_{n+2}^p - x_{n+1}^p - 6x_n^p = A(n+2) + B - (A(n+1) + B) - 6(An + B)$

$= \cancel{An} + 2A + \cancel{B} - \cancel{An} - A - \cancel{B} - 6An - 6B$

$-6An + (A - 6B)$

H.S. $= -6n + 1$

Sammenlign koeffisienter $\Rightarrow$ $-6A = -6$

$A - 6B = 1$

$\Rightarrow A = 1,\ B = 0$.

Vi har funnet en partikulær løsning, $x_n^p = n$.

Generelle løsningen :

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C(-2)^n + D \cdot 3^n + n.$$

Eksempel. $x_{n+1} - 2x_n = 2^n$.

Høyresiden har formen $A2^n$. Prøv med det i x_n^p. Prøver $x_n^p = A\,2^n$.

Ønsker at $x_{n+1}^p - 2x_n^p = 2^n$ (*)

$$\Rightarrow \quad A\,2^{n+1} - 2\,A\,2^n = 2^n$$

$$0 = 2^n.$$

$x_n^p = A\,2^n$ går ikke!

Kan prøve med $x_n^p = A n\,2^n$.

$$\Rightarrow \quad A(n+1)\,2^{n+1} - 2\,A n\,2^n = 2^n$$

$$A\,2^{n+1} + \cancel{An\,2^{n+1}} - \cancel{An\,2^{n+1}} = 2^n$$

$$A = \frac{1}{2}.$$

Da er $x_n^p = A n \cdot 2^n = \frac{1}{2} n \cdot 2^n = n \cdot 2^{n-1}$

(ii) Homogene: $x_{n+1} - 2x_n = 0$

$$x_{n+1} = 2x_n \Rightarrow x_n = C \cdot 2^n$$

Gen. løs.:

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C \cdot 2^n + n\,2^{n-1}.$$

Ok form på høyresiden

(i) $f(n)$ et polynom i n. Prøv med $x_n^p = g(n)$,
g polynom av samme grad som f.

(ii) $f(n)$ har form $a^n p(n)$, p polynom

noen ganger må gange med n.

(iii) $f(n) = b^n(A\sin(an) + B\cos(an))$,
a, b, A, B konstanter.

Prøve $x_n^p = b^n(C\sin(an) + D\cos(an))$