Uke 6. Differensligninger. / Midtveiseksamen.

Avrundingsfeil i differensligninger Kap 6. Kompendiet.

Eksempel $x_{n+2} - \frac{19}{3}x_{n+1} + 2x_n = 0$

$x_0 = 1, \quad x_1 = 1/3.$

Kar. ligning. $r^2 - \frac{19}{3}r + 2 = 0$

$3r^2 - 19r + 6 = 0$

$(3r - 1)(r - 6) = 0$

$r_1 = 1/3, \quad r_2 = 6.$

Generelle løsning $x_n = C\,3^{-n} + D\,6^n.$

Init. bet. $\Rightarrow$ $1 = x_0 = C + D$, $1/3 = x_1 = \frac{1}{3}C + 6D$ $\Rightarrow$ $C = 1$, $D = 0$

Løsningen $x_n = 3^{-n}$

Så $x_n \to 0$ når $n \to \infty$.

Man kan si at denne løsningen er "ustabil" fordi: hvis vi endre init. bet. slik at $D \neq 0$. da vil $x_n \to \infty$, eller $-\infty$ når $n \to \infty$.

Dette vil skje hvis vi får avrundingsfeil i initialbetingelsene.

Mer presist: $x_0 = 1,\ x_1 = 1/3$.

x_1 må avrundes i flyttall. (totallsystemet).

Da har vi $\tilde{x}_0 = 1,\ \tilde{x}_1 = \frac{1}{3} + \varepsilon$,

(typisk vil $\varepsilon \approx 10^{-16}$ på 64 bits flyttall).

Nå har vi $\tilde{x}_n = C\left(\frac{1}{3}\right)^n + D\,6^n$

$$\left.\begin{aligned} 1 = \tilde{x}_0 &= C + D \\ \tfrac{1}{3} + \varepsilon = \tilde{x}_1 &= \tfrac{1}{3}C + 6D \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C &= 1 - \tfrac{3}{17}\varepsilon \\ D &= \tfrac{3}{17}\varepsilon \end{aligned}$$

Da er $\tilde{x}_n = \left(1 - \frac{3}{17}\varepsilon\right)3^{-n} + \frac{3}{17}\varepsilon\, 6^n$.

Da vil $\tilde{x}_n \approx \frac{3}{17}\varepsilon 6^n$ for stor n og

$\tilde{x}_n \to \pm\infty$ når $n \to \infty$.

Estimerer "unit round off"

$$\tilde{x}_n \approx \frac{3}{17}\varepsilon\, 6^n$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon \approx \frac{17}{3}\,\frac{\tilde{x}_n}{6^n}$$

Velg: $n = 50, 100$ Man får $\varepsilon \approx 10^{-16}$ hvis vi bruker 64 bits flyttall.

Observasjon. La $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$

La $r^2 + br + c = 0$ være k.l. og anta at det er 2 reelle røtter r_1, r_2 distrinkte. og anta at $|r_1| > |r_2|$. La $\tilde{x}_n$ være den numeriske løsningen.

Da vil $\tilde{x}_n \approx C r_1^n$ når n er stor, hvis avrundingsfeil skjer.

Observasjon 2:

$$\frac{\tilde{x}_n}{\tilde{x}_{n-1}} \approx \frac{C r_1^n}{C r_1^{n-1}} = r_1$$

Kan vise at $\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{x}_n}{\tilde{x}_{n-1}} = r_1$

(dette kan være startpunktet for å finne røttene til et polynom av vilkårlig grad).

Midtveiseksamen

Teller 1/3 del av karakter.
Avslutt : 2/3 deler.

Flervalgsspørsmål. 20

10 spørsmål teller 2 poeng
10 " " 3

Midtveis H2020

Oppgave 1. Tallet 121 blir i 2-tallssystemet: hva?

	121	1	% 2
// 2	60	0	% 2
// 2	30	0	% 2
// 2	15	1	% 2
// 2	7	1	% 2
// 2	3	1	% 2
// 2	1	1	% 2

$\Rightarrow$ $121 = 1111001_2$. Svaret (Alt. 3.).

Oppgave 2. Tallet 140.0625 i heksadesimal?

Begynn med 140

$$\begin{array}{l|ll} & 140 & \cancel{12}\ \text{c} & \%\ 16 \\ //16 & 8 & 8 & \%\ 16 \end{array}$$

0, 1, ..., 9

10	11	12	13	14	15
a	b	c	d	e	f

$$140 = 8c_{16}$$

$$0.0625 = \frac{1}{16} \quad \Rightarrow \text{Svaret} \quad 8c.1_{16}$$

Oppgave 3. Tallet 1.8 i totallsystemet.

Nok å se på 0.8

$$\begin{aligned}
&& 0.8 &= d_{-1}2^{-1} + d_{-2}2^{-2} + d_{-3}2^{-3} + \dots && \Big|\cdot 2 \\
d_{-1}=1 \quad & 1+0.6 = & 1.6 &= d_{-1} + d_{-2}2^{-1} + d_{-3}2^{-2} + \dots && \\
&& 0.6 &= d_{-2}2^{-1} + d_{-3}2^{-2} + \dots && \Big|\cdot 2 \\
d_{-2}=1 \quad & 1+0.2 = & 1.2 &= d_{-2} + d_{-3}2^{-1} + \dots && \\
&& 0.2 &= d_{-3}2^{-1} + d_{-4}2^{-2} + \dots && \Big|\cdot 2 \\
d_{-3}=0 \quad && 0.4 &= d_{-3} + d_{-4}2^{-1} + \dots && \\
&& 0.4 &= d_{-4}2^{-1} + d_{-5}2^{-2} + \dots && \Big|\cdot 2 \\
d_{-4}=0 \quad && 0.8 &= d_{-4} + d_{-5}2^{-1} + \dots && \\
&& 0.8 &= d_{-5}2^{-1} + \dots &&
\end{aligned}$$

$$0.8 = 0.\underline{1100}\ \underline{1100}\ \underline{1100}\dots_2$$

$$\Rightarrow 1.8 = 1.\underline{1100}\ \underline{1100}\ \underline{1100}\dots_2 \,. \quad \text{Svaret.}$$

Oppgave 4

1. $x^3 = 27. \Rightarrow x = 3$ ✗
2. $1/2$ ✗
3. $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}.$ ✓
4. $100x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{10}$ ✗
5. $1/3$ ✗

Oppgave 5

$(3+z)^8$ kan også skrives som $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ hvor $b_k \in \mathbb{Z}$. Hva er b_6?

Svar

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

La $a=3, b=z, n=8. \Rightarrow$

$$(3+z)^8 = \sum_{k=0}^{8} \underbrace{\binom{8}{k} 3^{8-k}} z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{8} b_k z^k$$

$$\Rightarrow b_k = \binom{8}{k} 3^{8-k}$$

$k=6$? $b_6 = \binom{8}{6} 3^2 = \binom{8}{6} \cdot 9$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \Rightarrow \binom{8}{6} = \frac{8!}{6!\,2!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

$\Rightarrow b_6 = 28 \cdot 9 = 252.$ Svaret.

Oppgave 6 . Summen av 2 irrasjonale tall
kan være irrasj / rasjonal.

Oppgave 7 . $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x/100 < 1 \}$.

Hva er den minste øvre skranke til A ?

eller Sup(A).

$A = \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$.

AH:

1. 99 ✓
2. 1/99
3. 100
4. ikke definert
5. 1/100.

$A = [0, \infty)$

Oppgave 8 . over 10^{308} overflow.

10^{50} ✓

Oppgave 9 . For hvilken verdi av β er ligningen $7_\beta + 117_\beta = 121_\beta$ riktig ?

AH: $\beta = 10, 11, 13, 12, 14.$

Ligningen:

$$7 + \underbrace{1.\beta^2 + 1.\beta^1 + 7.\beta^0}_{117_\beta} = 1.\beta^2 + 2.\beta^1 + 1.\beta^0$$

$$7 + \cancel{\beta^2} + \beta + 7 = \cancel{\beta^2} + 2\beta + 1$$

$$13 = \beta. \quad \Rightarrow \beta = 13.$$