Midtveiseksamen H2020 Fortsatt.

oppgave 10

$a \in \mathbb{R}$ $\quad \tilde{a}$ er a avrundet

absolutt feilen $\quad \tilde{a} - a$

rel. $\quad \dfrac{\tilde{a} - a}{a}, \quad a \neq 0$

Svaret er "Den rel. feilen kan være vil. stor"

Oppgave 12 . Hvilket uttrykk vil gi stor rel. feil for stor flyttall x. ?

- $\ln(x+1) - \ln(x)$ (*)
- $\dfrac{1}{x^2 - \sqrt{1+x}}$
- $x^2 - 1$
- $x^3 + x^5$
- $x^5 - x^3$

$\ln(x+1) - \ln(x) \to 0$ når $x \to \infty$

Bedre : $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ (numerisk)

Oppgave 13. Hvilken er lineær, homogen, og av andre orden?

$x_{n+2} - x_{n+1} x_n = 0$ ikke lineær.

$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = -1$ ikke homogen.

$\boxed{x_{n+2} + 2n^2 x_{n+1} - x_n = 0}$ (*). Svaret.

$x_{n+2} - x_n = 3 - \sin n$ ikke hom.

$x_{n+1} + 3 x_n = 0$ orden 1, ikke 2

Opp 14. $x_{n+1} - 3x_n = -3^n$, $n \geq 0$, $x_0 = 1$.

Homogene: $x_{n+1} - 3x_n = 0$, $x_{n+1} = 3x_n$

$\Rightarrow x_n^h = C\,3^n$, C konstant.

Partikulær? Prøv med $x_n^p = A\,3^n$. (samme form som høyre siden).

Ønsker $x_{n+1}^p - 3x_n^p = -3^n$ (*)

$A\,3^{n+1} - 3A\,3^n = -3^n$

$0 = -3^n$ Dette går ikke

Prøv: $x_n^p = An\,3^n$:

$A(\cancel{n}+1)3^{n+1} - \cancel{3 \cdot An\,3^n} = -3^n$

$3A = -1 \Rightarrow A = -1/3$

Gen. løsn: $x_n = x_n^h + x_n^p = C\,3^n - \frac{1}{3}n\,3^n$

In. bet. $x_0 = 1 \Rightarrow 1 = C - 0 \Rightarrow C = 1$

$$x_n = 3^n - \frac{1}{3}n\,3^n$$

$$= 3^n\left(1 - \frac{n}{3}\right).$$

Opp 15. $x_{n+1} - 2(n+1)x_n = 0$, $n \geq 0$, $x_0 = 1$.

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = 2(n+1)x_n$$

$$x_n = 2n\,x_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x_n = 2^n n!} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n} \quad \underbrace{n(n-1)\cdots 1}$$

Opp 16. $x_{n+2} + 4x_{n+1} - 12x_n = 0$. Gen løsningen?

Kar lign.: $r^2 + 4r - 12 = 0$ $\quad (r-2)(r+6)=0$

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-12)\cdot 1}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 8}{2} = -2 \pm 4.$$

$$r_1 = 2, \quad r_2 = -6.$$

$$x_n = C r_1^n + D r_2^n$$

$$= C\,2^n + D(-6)^n.$$

✓ Svaret.

Opp. 18. $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = \underline{3n+3}$. Gen. løs.

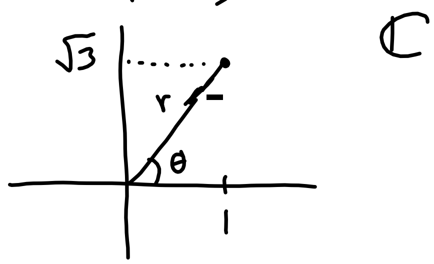
Hom. kar. lig. $r^2 - 2r + 4 = 0$

$$r = 1 \pm \sqrt{-3} = 1 \pm \sqrt{3}\, i$$

La $r = 1 + \sqrt{3}\, i$.

$$\Rightarrow x_n^h = \rho^n \left[E \cos(n\theta) + F \sin(n\theta) \right],$$

hvor $r = \rho e^{i\theta}$.



$$\theta = \frac{\pi}{3}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\rho = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$

$$\Rightarrow x_n^h = 2^n \left[E \cos\frac{n\pi}{3} + F \sin\frac{n\pi}{3} \right].$$

x_n^p? Prøv med $x_n^p = An + B$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(A(n+2) + B\right)}_{x_{n+2}} - 2\left(A(n+1) + B\right) + 4\left(An + B\right) = 3n+3$$

$$An + \cancel{2A} + B - 2An - \cancel{2A} - 2B + 4An + 4B = 3n+3$$

$$3An + 3B = 3n + 3$$

$$\Rightarrow A = 1, \quad B = 1$$

$$\Rightarrow x_n^p = n + 1$$

$$\Rightarrow x_n = 2^n \left[E \cos\frac{n\pi}{3} + F \sin\frac{n\pi}{3} \right] + n + 1.$$