Taylorapproksimasjon med Restledd

11.2 Kalkulus.

Gitt en funksjon $f(x)$ og et punkt $a \in \mathbb{R}$

Taylorapproksimasjonen $P_n(x) = T_n f(x)$ av orden

n det entydige polynomet av grad $\leq n$ slik

at $P_n(a) = f(a)$, $P_n'(a) = f'(a)$, $\ldots$, $P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

Formelen:

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Hva er feilen ? Eller hva er restleddet ?

La $R_n f(x) = f(x) - T_n f(x)$. $R_n f(x)$ er restleddet.

Eller : $f(x) = T_n f(x) + R_n f(x)$

Skal vise :

<u>Teorem</u> For $n \geq 0$,

$$R_n f(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n \, dt. \quad (*)$$

<u>Bevis</u>. Ved induksjon på n. $n = 0$?

Må vise at $f(x) = T_0 f(x) + R_0 f(x)$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

✓ Stemmer.

Induksjon : kan anta at $(*)$ gjelder når vi erstatter n med $n-1$.

D.v.s. vi kan anta at

$$R_{n-1} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \underbrace{f^{(n)}(t)}_{\text{derivere}} \overbrace{(x-t)^{n-1}}^{\text{integrerer}} \, dt.$$

Skal bruke delvis integrasjon

$$(n-1)!\, R_{n-1} f(x) = \left[f^{(n)}(t)\left(-\frac{(x-t)^n}{n}\right) \right]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x f^{(n+1)}(t)\left(-\frac{(x-t)^n}{n}\right) dt$$

$$= f^{(n)}(a)\,\frac{(x-a)^n}{n} + \frac{1}{n}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt$$

$$\Rightarrow R_{n-1} f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)\,(x-a)^n}{n!} + R_n f(x).$$

$$\Rightarrow f(x) = T_{n-1} f(x) + R_{n-1} f(x)$$

$$= \underbrace{T_{n-1} f(x) + \frac{f^{(n)}(a)\,(x-a)^n}{n!}}_{T_n f(x)} + R_n f(x)$$

$\square$

Korollar. Anta at f og dens $n+1$ første deriverte er kontinuerlige på intervallet $[a,x]$. La $M = \max_{a \le t \le x} |f^{(n+1)}(t)|$. Da er

$$|R_n f(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (*)$$

Bevis

$$|R_n f(x)| = \left| \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt \right|$$

$$= \frac{1}{n!} \left| \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt \right|$$

$$\le \frac{1}{n!} \int_a^x \left| f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \right| dt$$

(trekant ulikheten for integraler, $|a+b| \le |a| + |b|$).

$$= \frac{1}{n!} \int_a^x |f^{(n+1)}(t)| (x-t)^n \, dt$$

$$\le \frac{M}{n!} \int_a^x (x-t)^n \, dt$$

$$= \frac{M}{n!} \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_{t=a}^{t=x}$$

$$= \frac{M}{n!} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)} = \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

$\square$

Alternativt restledd.

Hvis $f^{(n+1)}$ er kontinuerlig i intervallet $[a,x]$.
Det fins et tall c i (a,x) slik at

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (*)$$

Noen skriver c_x for å indikere at c avhenger x men vi vet ikke hvordan.

Bevis. Kan bruke følgende lemma:
Anta at $g(t) \geq 0$, $t \in [a,b]$.
og at $f(t)$ er kontinuerlig. Da fins $c \in (a,b)$, slik at

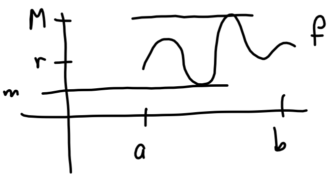
$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt \quad (*)$$

Hvorfor? Hvis $g = 0$, begge sidene $= 0$.
Anta at $g \neq 0$. Da kan vi definere

$$r = \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt}.$$

Da har vi at $r \leq M$, hvor $M = \max_{t\in[a,b]} f(t)$
og $r \geq m$, $m = \min_{t \in [a,b]} f(t)$.

Skjæringssetning: må finnes $c \in (a,b)$ slik at
$f(c) = r$.



Nå se på restleddet:

$$R_n f(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{\text{kont.}}\underbrace{(x-t)^n}_{\geq 0}\,dt$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)\int_a^x (x-t)^n\,dt \quad \text{for } c \in [a,x]$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_a^x$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Anvendelse. Vi ønsker å beregne e^x for $x \in [0,1]$, med en feil av mindre enn 10^{-3}. Vi bruker Taylorapproksimasjonen

$$T_n(e^x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$(f(x) = e^x)$, hvor n er stor nok.

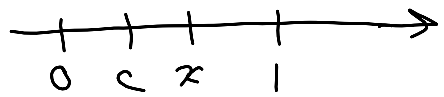
Hvor stor må n være?

Vi ønsker n slik at $|R_n f(x)| < 10^{-3}$.

Har vist at $R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$,

hvor $a = 0$, $f(x) = e^x$. Da er

$$R_n f(x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{og} \quad c \in [0,x].$$



Vi ser at $0 \leq c \leq 1$ og $e^c \leq e^1 < 3$.

(fordi $e \approx 2,7\dots$)

$$\Rightarrow \quad |R_n f(x)| \leq \frac{3}{(n+1)!} \quad (\text{for alle } x \in [0,1])$$

Prøv med $n = 1, 2, \dots, 6$:

$$\frac{3}{(6+1)!} = \frac{3}{7!} < 10^{-3}$$

$4! = 24$, $5!$ $\quad 7! = 5040$

Vi har vist at

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$$

approksimerer e^x for $x \in [0,1]$, med feil $< 10^{-3}$.