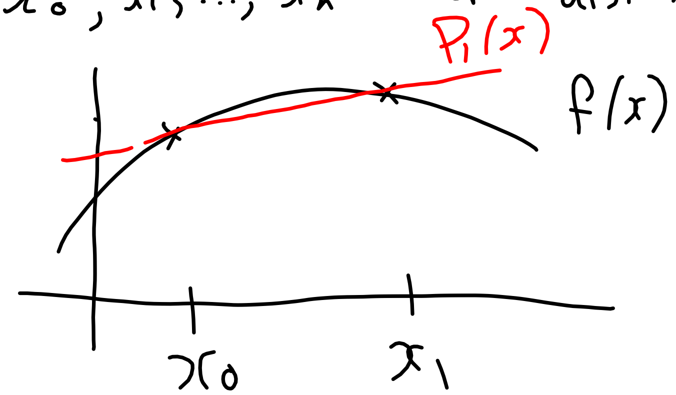
Polynominterpolasjon

Husk Taylorapproksimasjon :
Har en funksjon $f(x)$, velger et punkt a, velg n. Finner det entydige polynomet $P_n(x)$ slik at $P_n(a) = f(a)$, $P_n'(a) = f'(a)$, ... $P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$. Fant faktisk en formel : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

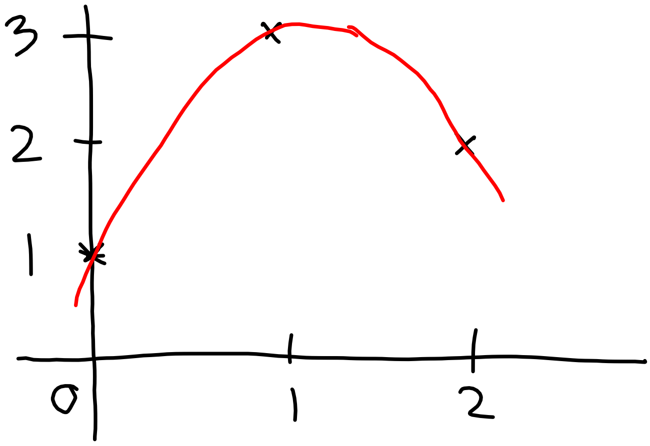
I dag: Ønsker å finne et polynom $P_n(x)$ slik at $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots n$, hvor $x_0, x_1, \dots, x_n$ er distinkte.

$n = 1$



Generelt: Finn $P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$ slik at $P_n(x_0) = f(x_0)$, $P_n(x_1) = f(x_1)$, $\dots$, $P_n(x_n) = f(x_n)$

Eksempel $n=2$. Finn $P_2(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$ slik at $P_2(0)=1$, $P_2(1)=3$, $P_2(2)=2$.



La $x=0$: $P_2(0)=c_0 = 1$

$x=1$: $P_2(1)=c_0+c_1+c_2 = 3$

$x=2$: $P_2(2)=c_0+2c_1+4c_2 = 2$

Ser at $c_0=1$ $\Rightarrow$
$$1+c_1+c_2=3 \Rightarrow \boxed{c_1+c_2=2}$$
$$1+2c_1+4c_2=2 \Rightarrow \boxed{2c_1+4c_2=1}$$

.... $c_1=\frac{7}{2}$, $c_2=-\frac{3}{2}$.

$$\Rightarrow P_2(x)=1+\frac{7}{2}x-\frac{3}{2}x^2.$$

Tungvint: Bedre å bruke Newtonform.

Newton form : $P(x) = P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1)$.

$1 = f(0) = P(0) = c_0 \Rightarrow c_0 = 1$

$3 = f(1) = P(1) = c_0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 3 - c_0 = 2$

$2 = f(2) = P(2) = c_0 + 2c_1 + 2c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{2 - c_0 - 2c_1}{2}$

$\Rightarrow c_2 = \frac{2 - 1 - 2.2}{2} = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow P_2(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2} x(x-1)$.

$= 1 + \frac{7}{2} x - \frac{3}{2} x^2$ same

Den generelle Newtonform er :

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}), \tag{*}$$

hvis vi ønsker at $P_n(x_i) = f(x_i)$, $x_0, x_1, \dots, x_n$ distinkte.

Da kan vi finne først c_0, så c_1, $\dots$ c_n.

1. Først, finn c_0 ved å sette $x = x_0$:

$$P_n(x_0) = c_0 \quad . \text{ Da setter vi } c_0 = f(x_0). \ (*)$$

2. Finn c_1 : sette $x = x_1$:

$$P_n(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0). \quad = f(x_1)$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{f(x_1) - c_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

3. Finn c_2 : sette $x = x_2$:

$$P_n(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$
$$= f(x_2)$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{f(x_2) - c_0 - c_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_0) - \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$c_2 = \frac{\left(\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}\right) - \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Vi ser at c_k avhenger av f, $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Vi kan skrive : $c_k = [x_0, x_1, \ldots, x_k]f$.

Dette er den dividerte differansen til f av orden k i punktene $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

kan vise at $[x_0, \dots, x_k]f = \dfrac{[x_1, \dots, x_k]f - [x_0, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}$

Dette kan man bruke for å beregne $c_0, c_1, \dots c_n$,
gitt at $[x_i]f = f(x_i)$. , alle i.

Et alternativ formel er:

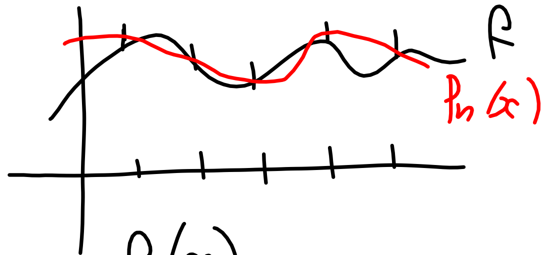
$$[x_0, \dots, x_k]f = \frac{[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k]f - [x_0, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_{k-1}}.$$

Og kan vise at:

$$[x_0, \dots, x_k]f = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} (x_i - x_j)}.$$

Senere: ønsker vi å studere numerisk derivasjon og numerisk integrasjon.

For eksempel:



Forventer at $P_n(x) \approx f(x)$

Og på samme måte at $P_n'(x) \approx f'(x)$.

$$\int_a^b P_n(x)\,dx \approx \int_a^b f(x)\,dx$$

P_n vil være enten en Taylor approks. eller et interpolasjonspolynom.