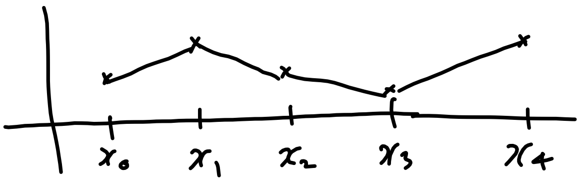
Numerisk Derivasjon

Anta at vi har måleverdier $(x_i, y_i)_{i=0,1,..,n}$



Hvordan kan vi estimere den deriverte ?
Eller stigningstallet. Det enkleste er: i et intervall $[x_i, x_{i+1}]$ estimerer vi den deriverte

Som $$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

Anta at $y_i = f(x_i)$, ukjent funksjon f.
Da estimerer vi $f'(x_i)$ med $\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$.

Vi kjenner dette fra definisjon av den deriverte:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Forventer at $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ når h er "liten".

Feilanalyse. Kan bruke Taylor approksimasjon:

Bruk T.A. til f i a av orden 1 med restledd:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + (x-a)f'(a)}_{T_1 f(x)} + \underbrace{\frac{(x-a)^2}{2!} f''(c)}_{R_1 f(x).},$$

hvor $c \in (a,x)$. La $x = a+h$:

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(c).$$

$$\Rightarrow \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \frac{h}{2} f''(c).$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| = \frac{h}{2} |f''(c)|.$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| \leq \frac{h M}{2},$$

hvor $M = \max_{a \le x \le a+h} |f''(x)|$.

Hva med feilen når vi har avrundingsfeil?

Som regel vil $f(a)$ være et flyttall.

La $\widetilde{f(a)}$ være representasjonen på 64 bits datamaskin, i flyttall. Vet at

$$\frac{\widetilde{f(a)} - f(a)}{f(a)} = \varepsilon_1 \approx 10^{-16}$$

Omskrevet, $\widetilde{f(a)} = f(a)(1+\varepsilon_1)$

Det samme gjelder for $f(a+h)$:

$$\widetilde{f(a+h)} = f(a+h)(1+\varepsilon_2), \quad \varepsilon_2 \approx 10^{-16}.$$

Hva blir feilen? Den er nå

$$\left| \frac{\widetilde{f(a+h)} - \widetilde{f(a)}}{h} - f'(a) \right| = \left| \frac{f(a+h)(1+\varepsilon_2) - f(a)(1+\varepsilon_1)}{h} - f'(a) \right|$$

$$= \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) + \frac{\varepsilon_2 f(a+h) - \varepsilon_1 f(a)}{h} \right|$$

trekantulikheden:

$$\leq \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| + \left| \frac{\varepsilon_2 f(a+h) - \varepsilon_1 f(a)}{h} \right|$$

$$\leq \frac{h}{2} M_1 + \frac{|\varepsilon_2|\,|f(a+h)| + |\varepsilon_1|\,|f(a)|}{h}$$

hvor $M_1 = \max\limits_{a \leq x \leq a+h} |f''(x)|$,

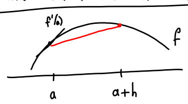
$$\leq \boxed{\frac{h}{2} M_1 + \frac{2\varepsilon M_2}{h}},$$

hvor $\varepsilon = \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\} \approx 10^{-16}$

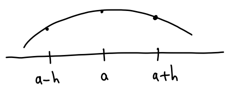
og $M_2 = \max\limits_{x \in [a, a+h]} |f(x)|$.

Vi ser at feilen går ned med h til et visst punkt, og så øker igjen på grunn av det andre leddet.

Andre metoder for numerisk derivasjon



Kan bruke polynominterpolasjon av høyere grad til å få en bedre approksimasjon. Hva med kvadratisk interpolasjon:



La $p_2(x)$ være interpolanten til f i $a-h, a, a+h$, og estimerer $f'(a) \approx p_2'(a)$.

$$p_2(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1),$$

hvor $x_0 = a-h$, $x_1 = a$:

$$p_2(x) = c_0 + c_1(x-(a-h)) + c_2 \underbrace{(x-(a-h))(x-a)}$$

Finner at $c_0 = f(a-h)$, $c_1 = \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$,

$$c_2 = \frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{f(a)-f(a-h)}{h}}{2h} = \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{2h^2}.$$

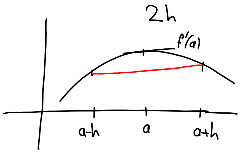
Derivere $p_2(x)$:

$$p_2'(x) = c_1 + c_2(2x-2a+h)$$

$$\Rightarrow p_2'(a) = c_1 + c_2 h$$

$$= \frac{f(a)-f(a-h)}{h} + \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{2h^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{h}$$

$$= \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}.$$



Man kan vise at feilen er :

$$\left| \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} - f'(a) \right| \leq \frac{h^2 M_1}{2} + \frac{\varepsilon M_2}{h}$$

Approksimasjonsraten er nå $O(h^2)$, hvis vi ignorerer avrundingsfeil.

Forlengs differanse $O(h)$
Sentral differanse $O(h^2)$.

Kan bruke Taylorapproks. igjen : orden 2 :

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(c_1), \; c_1 \in (a, a+h)$$

$$f(a-h) = f(a) - h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) - \frac{h^3}{3!} f'''(c_2), \; c_2 \in (a-h, a)$$

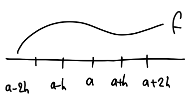
$$\Rightarrow \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a) + \frac{h^{\cancel{3}\,2}}{3!} \frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2\cancel{h}}$$

$$= f'(a) + \frac{h^2}{6} f'''(c), \quad c \in (c_1, c_2).$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} - f'(a) \right| \leq \frac{h^2}{6} M,$$

hvor $M = \max_{a-h \leq x \leq a+h} |f'''(x)|$.

Grad 4 ?



La $f'(a) \approx p_4'(a)$, hvor p_4 interpolerer f i $a-2h, a-h, a, a+h, a+2h$.

.... Kan vise at :

$$p_4'(a) = \frac{f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h)}{12h},$$

Hva med å estimere $f''(a)$?