Differensialligninger Kap. 10, Kalkulus, Kap 13 Kompendiet.

Hvorfor? . La $x(t)$ være distance, t tid

$v(t) = x'(t)$ hastighet

$a(t) = v'(t) =$ akselerasjon

Slippe en ball. Hva er hastigheten av ballen som en funksjon av tid?

Gravitasjonskraft : $F_G = mg$

Luftmotstand : $F_L = -cv^2$

Kraft : $F = mg - cv^2$

Newtons 2. lov : $F = ma$

$$\Rightarrow \quad mg - cv^2 = ma = mv'$$

Eller $$\boxed{v'(t) = g - \frac{c}{m} v(t)^2}$$

Dette er en differensialligning, med ukjente funksjon v, ikke-lineær, av første orden

En første ordens differensiallignig har form

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

eller $\quad x' = f(t, x),$

hvor $x(t)$ er en ukjent funksjon, som vi ønsker å finne. Gitt i tillegg en startverdi $x(t_0) = x_0$ har vi et startverdiproblem.

Eksempler

① $x' = 3$, her er $f(t,x) = 3$

② $x' = g - \frac{c}{m}x^2$, her er $f(t,x) = g - \frac{c}{m}x^2$

③ $x' = 2t$, her er $f(t,x) = 2t$

④ $x' = t^3 + \sqrt{x}$, $f(t,x) = t^3 + \sqrt{x}$.

⑤ $x' = x$, $f(t,x) = x$.

Løsninger ?

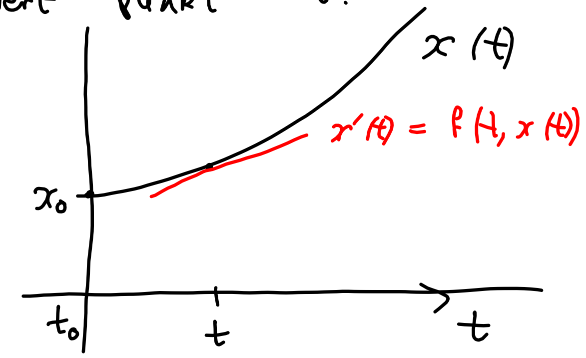
① Integrere begge sidene : $x(t) = 3t + C$

③ " " " $x(t) = t^2 + C$

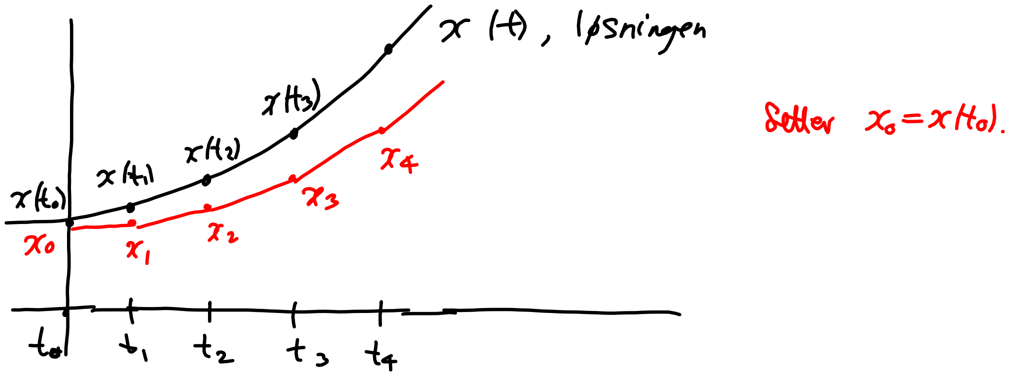
⑤ $x(t) = Ce^t$

Hvordan tolke ligningen ? $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$

Sier at gradienten til x er lik verdien til f i hvert punkt t.



Eulersmetode Velg en liten h, og definer tidspunktene $t_1 = t_0 + h$, $t_2 = t_1 + h$, ... Finn verdier (reelle) $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ slik at $x_k \approx x(t_k)$; alle k.



$x'(t) = f(t, x(t))$. Vi vet at hvis h er liten,

$$x'(t_k) \approx \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h}$$ "numerisk derivasjon"

I Eulersmetode, setter vi istedet

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = f(t_k, x_k).$$

Eller

$$\boxed{\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h f(t_k, x_k) \\ t_{k+1} &= t_k + h \end{aligned}}$$

Eulersmetode
$k = 0, 1, 2, \ldots$

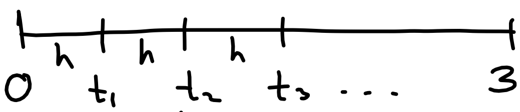
(gitt t_0, x_0).

Gitt (t_0, x_0), finn (t_1, x_1), (t_2, x_2), ...

Eksempel. Løs $\boxed{x' = t + x}$ på intervallet $[0,3]$ med N steg med Eulersmetode, og $x(0) = 0$.

Da er $t_0 = 0$, $x_0 = 0$. $t \in [0,3]$.

Vi lar $h = \frac{3}{N}$. Må finne $t_1, t_2, .., t_N$, $x_1, x_2, \ldots, x_N$.



Lar $t_{k+1} = t_k + h$, $k = 0, 1, .., N-1$.

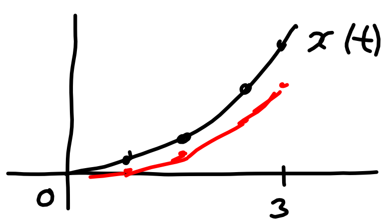
Eulersmetode:
$$x_{k+1} = x_k + h(t_k + x_k), \quad k = 0, 1, .., N-1$$

Analytisk løsning? Ja i dette tilfelle:

$$x(t) = -1 - t + e^t.$$

Stemmer det? $x'(t) = -1 + e^t = t + x(t)$

$x(0) = -1 - 0 + e^0 = -1 + 1 = 0.$



Man kan vise at feilen $x_k - x(t_k)$ er $O(h)$

Større nøyaktighet ? Eulers midtpunktmetode.

Eulers metode $O(h)$

Eulers midtpunkt: $O(h^2)$.

Ideen. I stedet for å bruke approksimasjonen

$$x'(t_k) \approx \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h},$$

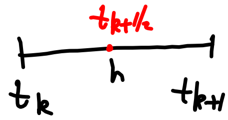
skal bruke

$$x'(t_{k+1/2}) \approx \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h}$$

Midtpunktmetoden. Gitt (t_k, x_k), skal finne (t_{k+1}, x_{k+1}) i to steg.

1. Regn ut en tilnærming til $x(t_{k+1/2})$ med enkel Euler:

$$\boxed{x_{k+1/2} = x_k + \frac{h}{2} f(t_k, x_k)}$$



2. Siden $\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h} \approx x'(t_{k+1/2}) = f(t_{k+1/2}, x(t_{k+1/2}))$

setter vi:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + h f(t_{k+1/2}, x_{k+1/2})}$$

$$\left(t_{k+1} = t_k + h, \quad t_{k+1/2} = t_k + h/2 \right)$$

Denne metoden har $O(h^2)$ nøyaktighet