Systemer av differensialligninger

Vi har sett at vi kan løse $x'(t) = f(t, x(t))$, med initialbetingelsen $x(t_0) = x_0$ numerisk med

Eulersmetode: Velger $h > 0$ og setter

$$t_{k+1} = t_k + h, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$x_{k+1} = x_k + h\, f(t_k, x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Da er $x_k \approx x(t_k)$, alle k.

Hva med følgende:

$$x' = xy + \cos t, \quad x(t_0) = x_0,$$
$$y' = 2 - t^2 + y, \quad y(t_0) = y_0.$$

Ukjente funksjoner $x(t), y(t)$.

Vi kan bruke vektornotasjon: $\underline{x}(t) = (x(t), y(t))$

$\underline{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Skriv

$$x' = f_1(t, x, y) = xy + \cos t$$
$$y' = f_2(t, x, y) = 2 - t^2 + y$$

La $\underline{f}(t) = (f_1(t, \underline{x}(t)), f_2(t, \underline{x}(t)))$. La $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$.

Da har vi:

$$\underline{x}'(t) = \underline{f}(t, \underline{x}(t)), \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0.$$

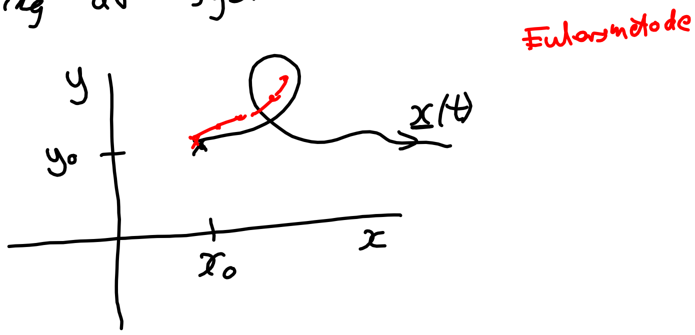
Nå kan bruke Eulersmetode:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + h\, \underline{f}(t_k, \underline{x}_k), \\ t_{k+1} = t_k + h \end{cases}$$

Dette betyr:

$$x_{k+1} = x_k + h\, f_1(t_k, x_k, y_k)$$
$$y_{k+1} = y_k + h\, f_2(t_k, x_k, y_k).$$

Geometrisk tolkning av systemet:



Andre ordens ligninger som et system av første ligninger

Eksempel $x'' = t^2 + \sin(x + x')$, $x(0) = 1$, $x'(0) = a$

Vi innfører en ny funksjon $\boxed{y(t) = x'(t)}$.

Da har vi $y'(t) = x''(t)$.

$$x' = y \quad (1)$$
$$y' = t^2 + \sin(x + x') \quad (2)$$

System av første orden:

$$x' = f_1(t, x, y) = y$$
$$y' = f_2(t, x, y) = t^2 + \sin(x + x').$$

Nå kan vi bruke Eulersmetode.

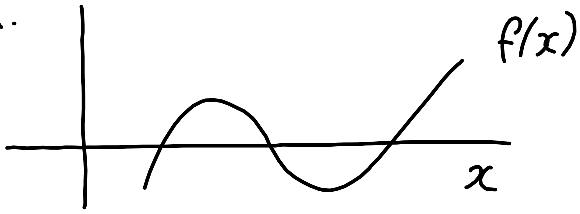
Hvordan å finne nullpunkter?

Gitt en funksjon $f(x)$. Ønsker å finne et punkt x hvor $f(x) = 0$.

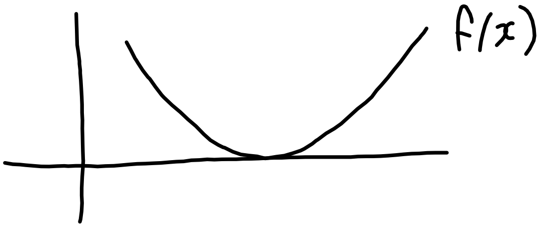
Eksempel: finne $\sqrt{3}$. kan definer $f(x) = x^2 - 3$.

Finn nullpunktet til f.

Eksempel.



f kan ha flere nullpunkter.



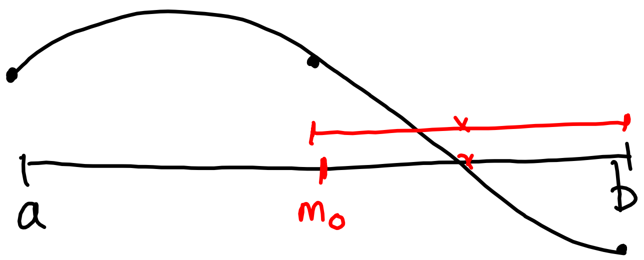
Kan være vanskelig å finne et nullpunkt x hvor både $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$.

Vi skal anta at f har bare et nullpunkt x i $[a, b]$, slik at $f'(x) = 0$.

<u>Halveringsmetoden</u>. Anta at f er kontinuerlig i $[a,b]$, og anta at $f(a)f(b) < 0$

($f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn).

Skjæringssetningen sier at det finnes $c \in (a,b)$ slik at $f(c) = 0$.



$f(a) > 0$
$f(b) < 0$

Vi gjetter på at midpunktet $m_0 = \frac{a+b}{2}$ er nullpunktet.

Tre tilfeller: hvis $f(m_0) = 0$ ferdig, har funnet et nullpunkt

Hvis $f(a)\,f(m_0) < 0$ lete etter et nullpunkt i $[a, m_0]$

Hvis $f(b)\,f(m_0) < 0$ " " " i $[m_0, b]$.

Algoritme Velger N.

$a_0 = a$; $b_0 = b$;

for $i = 1, 2, .., N$,

$m_{i-1} = (a_{i-1} + b_{i-1})/2$

if $f(m_{i-1}) == 0$

stop. returner m_{i-1}

if $f(a_{i-1}) f(m_{i-1}) < 0$

$a_i = a_{i-1}$; $b_i = m_{i-1}$

else

$a_i = m_{i-1}$; $b_i = b_{i-1}$

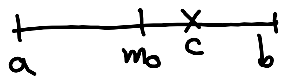
Da har vi fått a_N, b_N. La $m_N = (a_N + b_N)/2$.

m_N er en tilnærming til c. ($f(c) = 0$).

Feil i halveringsmetode?

La c være nullpunktet, $f(c)=0$.

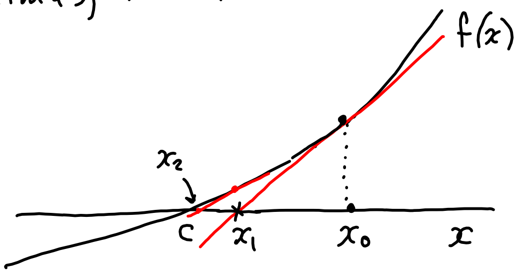
Ser at $|m_0 - c| \le \frac{b-a}{2}$



... ser at $|m_N - c| \le \frac{b-a}{2^N}$.

Newtonsmetode

Ideen er å bruke den deriverte til f til å estimere nullpunktet. Velger et startpunkt x_0. Finner tangenten i x_0 til f og ser hvor tangenten krysser x-aksen: gir ny approksimasjon x_1.



$f(c) = 0$

Hva er x_1? Ser at $\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \quad x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Newtonsmetode:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

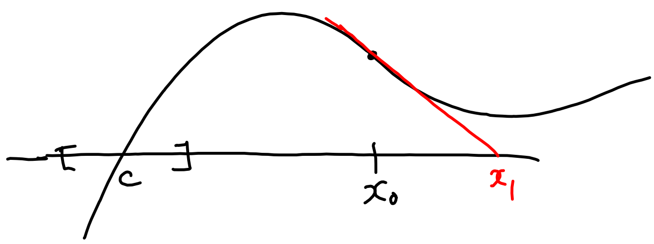
La $e_k = x_k - c$, feilen i x_k

Kan vise (under visse betingelser)

at $|e_{k+1}| \leq C\,|e_k|^2$

Halveringsmetode: $|e_{k+1}| = \frac{1}{2}|e_k|$

Newtonsmetode konvergerer ikke alltid:



x_2?