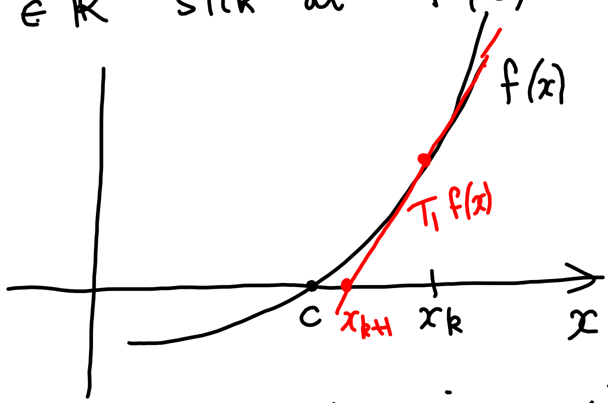
Newtons metode, sekant metode

u

Newtons metode Gitt en funksjon $f(x)$, ønsker å finne $c \in \mathbb{R}$ slik at $f(c) = 0$



Gitt at x_k er en approksimasjon til c, finn en bedre approksimasjon x_{k+1} ved å finne nullpunktet til $T_1 f(x)$, hvor $T_1 f(x)$ er Taylor approksimasjonen til f om x_k:

$$T_1 f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

Finn x_{k+1} hvor $T_1 f(x_{k+1}) = 0$:

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} \quad . \quad (*)$$

Newtonsmetode: velg x_0, bruk $(*)$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$, inntil $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$

Brukeren velger ε. Jeg liker $\varepsilon = 10^{-12}$.

Feilanalyse : La $e_k = x_k - c$

Uttrykk e_{k+1} som en funksjon av e_k.

Trekk c fra begge sidene av (*) :

$$e_{k+1} = e_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} . \qquad (2)$$

Nå bruk Taylorapproks. $T_1 f(x)$ med restledd :

$$f(x) = \underbrace{f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)}_{T_1 f(x)} + \underbrace{\frac{1}{2!} f''(\xi_k)(x - x_k)^2}_{R_1 f(x)}$$

La $x = c$. Vi har at $f(c) = 0$:

$$0 = f(c) = f(x_k) - f'(x_k)\, e_k + \frac{1}{2} f''(\xi_k)\, e_k^2$$

$$\Rightarrow \quad e_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} e_k^2$$

Fra (2) :

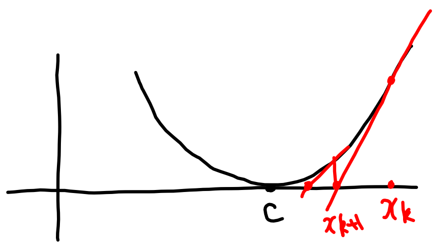
$$e_{k+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} e_k^2$$

Når x_k er i nærheten av c, $f''(\xi_k) \approx f''(c)$,
$f'(x_k) \approx f'(c)$. :

$$e_{k+1} \approx \frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(c)} e_k^2$$

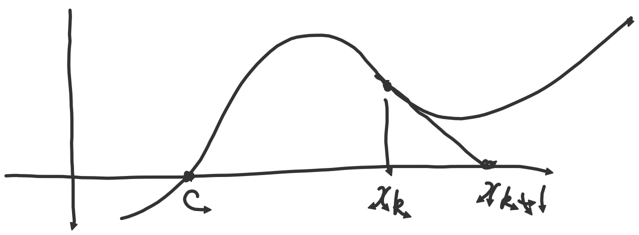
Så lenge $f'(c) = 0$ har vi vist kvadratisk konvergence : $|e_{k+1}| \leq C\, |e_k|^2$

For eksempel, hvis $e_k = 10^{-6} \Rightarrow e_{k+1} \approx 10^{-12}$

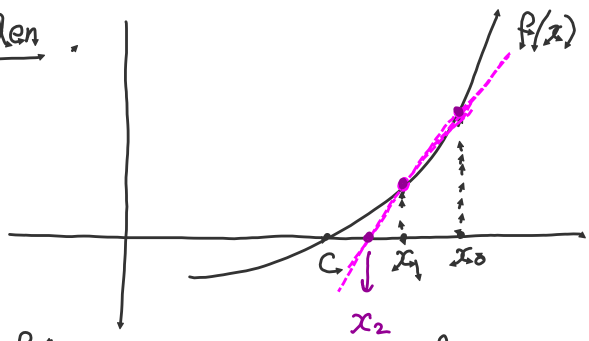


$f(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = 0$
kanskje konvergens
med ikke kvadratisk.

Ingen konvergens



Sekantmetoden.



Gitt x_0, x_1 finner x_2. Finn x_3 fra x_1 og x_2.
Approksimerer $f(x)$ med $s(x)$, det lineære polynomet slik at $s(x_0) = f(x_0)$ og $s(x_1) = f(x_1)$.
Definerer x_2 til å være slik at $s(x_2) = 0$.
Da er

$$s(x) = \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_1).$$

$$= -\left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)(x_1 - x) + f(x_1)$$

Ønsker at $s(x_2) = 0$:

$$-\left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)(x_1 - x_2) + f(x_1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = x_1 - \left(\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}\right) f(x_1).$$

Sekantmetoden : velger x_0 og x_1, distinkte, og lar vi

$$x_k = x_{k-1} - \left(\frac{x_{k-1} - x_{k-2}}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}\right) f(x_{k-1}),$$

$k = 2, 3, 4, \ldots$

Man kan vise at

$$|e_{k+1}| \leq C\,|e_k|^r,$$

hvor $r = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618$

For eksempel hvis $e_k = 10^{-6}$,

$$\Rightarrow e_{k+1} \approx (10^{-6})^{1.618} = 10^{-6 \cdot 1.618}$$
$$= 10^{-9.7}.$$