1 Løsninger til midtveiseksamen MAT-INF 1100 15.10.2021

formelark er tillatt

Eksamensformat:

- 2 timers $\underbrace{\text{eksamen}}_{\text{Inspera}}$ hvor ~~ingen hjelpemidler tillatt~~.

TORSDAG 14/10 KL 15:00

- 20 flervalgsoppgaver med 5 svaralternativ. Kun ett svaralternativ er riktig per spørsmål.
- De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Total poengsum er 50.
- Får poeng for å svare riktig men blir ikke trukket i poeng ved å svare feil.

Oppgave 1. Det binære tallet 1101101 er det samme som det desimale tallet

A: 105

V **B:** 109

C: 110

D: 107

E: 111

$$1101101 = 1\times 2^0 + 0\times 2^1 + 1\times 2^2 + 1\times 2^3 + 0\times 2^4 + 1\times 2^5 + 1\times 2^6$$

$$= 1 + \quad + 4 + 8 + 32 + 64$$

$$= 109$$

Oppgave 2. Skrevet i totallsystemet blir det heksadesimale tallet $ae71_{16}$

A: 1000 1110 0111 0001

B: 1010 1110 0011 0001

√ **C:** 1010 1110 0111 0001

D: 1010 1110 0001 0001

E: 1010 0110 0111 0101

Kan konvertere blokk-siffervis

$a_{16} = 10_{10} = 1010_2$

$e_{16} = 14_{10} = 1110_2$

$7_{16} = 7_{10} = 0111_2$

$1_{16} = 0001_2$

Tallet 1010 1110 0111 0001

Oppgave 3. På oktal form blir det binære tallet 1011.101

A: 12.5_8

B: 14.5_8

C: 15.15_8

V **D:** 13.5_8

E: 13.7_8

$2^3 = 8 \Rightarrow 2^{-3} = 8^{-1}$

$$
\begin{aligned}
1011.101 &= 1\times 2^{-3} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-1} \\
&\quad + 1\times 2^0 + 1\times 2 + 0\times 2^2 + 1\times 2^3 \\
&= 2^{-3} + 2^{-1} + 1 + 2 + 8 \\
&= (1+2^2)\,2^{-3} + 3\times 2^0 + 1\times 8^1 \\
&= 5\times 8^{-1} + 3\times 8^0 + 1\times 8^1 \\
&= 13.5_8
\end{aligned}
$$

Oppgave 4. Tallet $\frac{\sqrt{24}(\sqrt{\pi}+\sqrt{2\arcsin(1)})}{\sqrt{6\pi}}$ er

A: 1

B: −1

C: 0

D: et irrasjonalt tall

✓ **E:** 4

$$\boxed{\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4}}$$

Bruk at $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\sqrt{24}\left(\sqrt{\pi} + \sqrt{2\arcsin(1)}\right)}{\sqrt{6\pi}} = \frac{\sqrt{4}\left(\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

$$= 4$$

Oppgave 5. Vi har at $1020_\beta = 228$ for

A: $\beta = 3$

B: $\beta = 4$

C: $\beta = 5$

✓ **D:** $\beta = 6$

E: $\beta = 7$

Prøv for $\beta = 5$

$$1020_5 = 0 \times 5^0 + 2 \times 5^1 + 0 \times 5^2 + 1 \times 5^3$$

$$= 10 + 125 = 135_{10} < 228$$

$\Rightarrow$ rett svar er enten $\beta = 6$ eller 7.

$$1020_6 = 0 \times 6^0 + 2 \times 6^1 + 0 \times 6^2 + 1 \times 6^3$$

$$= 12 + 216 = 228.$$

Oppgave 6. 1/3 vil i totallsystemet representeres med sifferutviklingen

√ **A:** $0.010101\cdots$ der 01 repeteres i det uendelige

B: $0.011111\cdots$ der 1 repeteres i det uendelige

C: $0.101010\cdots$ der 10 repeteres i det uendelige

D: $0.001010\cdots$ der 10 repeteres i det uendelige

E: $0.0110110\cdots$ der 110 repeteres i det uendelige

Bruk Algoritme 3.16 fra kompendiet

$a = 1/3$

for $k = -1, -2, \ldots$

$d_k = \lfloor 2a \rfloor$

$a = 2a - d_k$

k	a	d_k
-1	$1/3$	$\lfloor 2/3 \rfloor = 0$
-2	$2/3 - 0 = 2/3$	$\lfloor 4/3 \rfloor = 1$
-3	$4/3 - 1 = 1/3$	$\lfloor 2/3 \rfloor = 0$
		1
		0
		1
		0

$\Rightarrow 1/3 = 0.0101\ldots_2$ der 01 repeteres

Oppgave 7. Hva er minste øvre skranke for mengden

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ og } (\ln x)^2 < 4\}? = (e^{-2}, e^2)$$

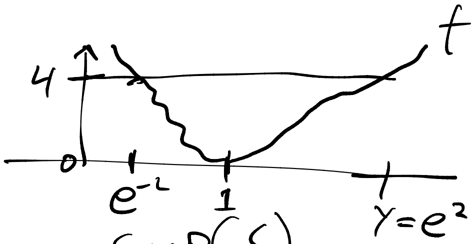
✓**A:** e^2

B: e^{-2}

C: 4

D: e

E: e^4



Ønsker å finne $\sup(S)$

Ser at $1 \in S$ siden $(\ln 1)^2 = 0 < 4$

og $f(x) = (\ln x)^2$ er strengt voksende

for $x > 1$ siden

$$f'(x) = 2\frac{\ln x}{x} > 0 \quad \text{for } x > 1$$

Dermed må $\sup(S)$ være punktet $y > 1$

slik at $(\ln y)^2 = 4 \Rightarrow \ln y = 2$

$\Rightarrow y = e^2$

Oppgave 8. Hvilket av følgende utsagn er sant?

A: Det fins et endelig antall irrasjonale tall

✓ **B:** Det er et endelig antall 64-bits flyttall

C: Avrundingsfeil skaper aldri problemer på en kalkulator

D: Det fins et reelt tall som er større enn alle heltall

E: Ethvert reelt tall kan tilnærmes vilkårlig godt med en følge av naturlige tall

A: Feil, $n+\sqrt{2}$ er irrasjonalt for alle heltall n

B: Sant $\underline{01 \ldots 10}$

C: Feil

D: Feil $x+2 > \lceil x \rceil + 1 > x$

E: Feil, F. eks $\frac{1}{2}$ er $\min_{n \in \mathbb{N}} |n - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Oppgave 9. Uttrykket $(2-x)^6$ kan også skrives som $\sum_{k=0}^{6} b_k x^k$ hvor hver av b_k'ene er heltall. Hvilket heltall er b_4? Du kan få bruk for at binomialkoeffisientene er gitt ved: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

A: $b_4 = 15$

✓ **B:** $b_4 = 60$

C: $b_4 = -15$

D: $b_4 = 4$

E: $b_4 = -4$

Bruk binomialformelen

$$(2-x)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 2^{6-k} (-x)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{6} \underbrace{\binom{6}{k} 2^{6-k} (-1)^k}_{=b_k} x^k$$

$$b_4 = \binom{6}{4} 2^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} 4 = 60$$

Oppgave 10. Anta at vi har en datamaskin som representerer tall på normalform i 10-tallsystemet, med 4 siffer for signifikanden og 1 siffer for eksponenten. Addisjonen $0.1342 + 99.88$ vil på en slik maskin gi resultatet

A: 99.99

B: 100.1

C: 100.01

D: 100.0142

E: 100.0

Oppgave 11. Vi skal se på tallet 0.1010 1010 10 i totallsystemet. Hvis vi trunkerer dette tallet til 5 binære siffer (etter punktum) blir den absolutte feilen

A: 5/1024

B: 5/512

C: 7/1024

D: 5/256

E: 3/1024

Oppgave 12. Hvilket av følgende uttrykk vil gi stor relativ feil om det evalueres for svært store positive flyttall?

A: $\sqrt{x^2 + x} + x$

B: $\ln(3x) - \ln(2x)$

C: $e^{3x} - e^{2x}$

D: $x^5 - x^3$

E: $\ln(x + 1) - \ln x$

Oppgave 13. Hvilket av følgende uttrykk vil kunne gi stor relativ feil for minst en verdi av x når det beregnes på datamaskin ved hjelp av flyttall?

A: $-3 + \sin x$

B: $x^4 + \pi$

C: $x^2 - 2$

D: $2 + x^2$

E: $2 + \cos x$

Oppgave 14. Hvilken av de følgende differensligningene er lineær?

A: $x_{n+2} + 4x_{n+1} + (-1)^n x_{n+1} x_n = \sin(2^n)$

B: $x_{n+1} = n^2 \sin x_n$

C: $x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n^2 = 0$

D: $x_{n+2} - (\ln n)x_{n+1} + x_n = 0$

E: $x_{n+1} + n/x_n = 1$

Oppgave 15. Differensligningen

$$x_{n+1} - x_n = 3$$

har en partikulærløsning

A: $x_n = 3^n$

B: $x_n = 3n$

C: $x_n = 3$

D: $x_n = 3n^2$

E: $x_n = n + 1$

Oppgave 16. En annenordens lineær og homogen differensligning med konstante koeffisienter har den generelle løsningen

$$x_n = C3^n + D2^{-n}.$$

Hva kan da ligningen være?

A: $2x_{n+2} + 5x_{n+1} - 3x_n = 0$
B: $2x_{n+2} + 7x_{n+1} - 3x_n = 0$
C: $2x_{n+2} - 7x_{n+1} - 3x_n = 0$
D: $2x_{n+2} - 7x_{n+1} + 3x_n = 0$
E: $2x_{n+2} + 7x_{n+1} + 3x_n = 0$

Oppgave 17. Vi har gitt en differensligning med tilhørende startverdier,

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 3^n, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 1,\ x_1 = 0.$$

Hva er løsningen?

A: $x_n = 3^n$

B: $x_n = (n+2)3^n - (n+1)2^n$

C: $x_n = 1 - n$

D: $x_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

E: $x_n = 3^n - 3n2^{n-1}$

Oppgave 18. Vi har differensligningen

$$x_{n+1} - 3x_n = 1, \quad n \geq 1, \quad x_1 = 1$$

og løser denne numerisk med 64-bits flyttall på datamaskin. For tilstrekkelig store n vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat

A: 2

B: 0

C: n

D: -1/6

E: overflow

Oppgave 19. Vi har differensligningen

$$9x_{n+2} - 3x_{n+1} - 2x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = -1/3.$$

og løser denne med 64-bits flyttall på datamaskin. For tilstrekkelig store n vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat

A: overflow

B: 0

C: 1/2

D: 3^n

E: 1

Oppgave 20. Differenslikningen

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}^2, \text{ der } x_0 = 0 \text{ og } x_1 = 1.$$

er gitt. Vi har tro på at følgende påstand er sann:
P_n: For alle heltall $n \geq 0$ gjelder det at x_{3n} er et partall mens x_{3n+1} og x_{3n+2} begge er oddetall. Vi forsøker å vise dette ved induksjon:

1. For $n = 0$ ser vi at $x_{3n} = x_0 = 0$ som er et partall, mens $x_{3n+1} = x_1 = 1$, som er et oddetall. Vi har dessuten at $x_{3n+2} = x_2 = x_1 + x_0^2 = 1$ også er et oddetall, så P_n er sann for $n = 0$.

2. Anta nå at vi har bevist at P_n er sann for $n = 1, 2, \ldots, k-1$, vi må vise at da er også P_k sann. Vi har at $x_{3k} = x_{3k-1} + x_{3k-2}^2$, og fra induksjonshypotesen vet vi at x_{3k-2} og x_{3k-1} begge er oddetall. Da er også x_{3k-2}^2 et oddetall, og siden summen av to oddetall er et partall, så er x_{3k} et partall. På samme måte har vi $x_{3k+1} = x_{3k} + x_{3k-1}^2$. Vi vet nå at x_{3k} er et partall, mens x_{3k-1}^2 er et oddetall. Dermed er x_{3k+1} et oddetall. Til slutt må vi sjekke x_{3k+2}. Vi har $x_{3k+2} = x_{3k+1} + x_{3k}^2$, og ut fra hva vi nettopp har vist er x_{3k+1} er x_{3k+1} et oddetall mens x_{3k} er et partall. Da er også x_{3k}^2 et partall så x_{3k+2} er summen av et partall og et oddetall og dermed et oddetall.

På bakgrunn av dette kan vi konkludere med at påstanden P_n er sann for alle $n \geq 0$.

Hvilket av følgende utsagn er sant?

A: Påstanden P_n er sann for alle $n \geq 0$, men del 1 av induksjonsbeviset er feil

B: Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

C: Påstanden P_n er ikke sann for alle $n \geq 0$, men induksjonsbeviset er riktig

D: Påstanden P_n er sann for alle $n \geq 0$, men del 2 av induksjonsbeviset er feil

E: Påstanden P_n er sann for alle $n \geq 0$ og induksjonsbeviset er riktig