1 Løsningsforslag for noen tidligere eksamensoppgaver

Siden det finnes løsningsforslag til alle oppgaver fra del 2, går jeg ikke gjennom noen oppgaver derfra. Svar til løsninger fra del 1 trenger man ikke motivere, men jeg løser dem her som om man trengte det.

Oppgave 1.4, 2019

Løsningen av differensiallikningen

$$y'' - 5y' + 6y = 6t + 1, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 14$$

er gitt ved

A: $y(t) = t - 1 + 2e^{-2t} + 3e^{-3t}$
B: $y(t) = t - 1 + 3e^{2t} + 2e^{3t}$
C: $y(t) = 4e^{-2t} + 3e^{3t}$
D: $y(t) = t + 6$
E: $y(t) = t + 1 + 2e^{2t} + 3e^{3t}$

Kar. likn $r^2 - 5r + 6 = 0$, $r = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$

$r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $y_h(t) = ae^{2t} + be^{3t}$ $a, b \in \mathbb{R}$

$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$. 0 er ikke ~~rot~~ rot i kar. likn. $\Rightarrow$

gjett $y_p(t) = c_0 + c_1 t$. Bestem c_0, c_1:

$y_p'' - 5y_p' + 6y_p = -5c_1 + 6c_0 + 6c_1 t \overset{\text{Ønsker at}}{=} 1 + 6t$

$\Rightarrow \begin{array}{l} 6c_0 - 5c_1 = 1 \\ 6c_1 = 6 \end{array} \Rightarrow c_1 = 1$ og $c_0 = 1$ $\Rightarrow y_p(t) = 1 + t$

og $y(t) = ae^{2t} + be^{3t} + 1 + t$

$y'(t) = 2ae^{2t} + 3be^{3t} + 1$

$y(0) = a + b + 1 = 6$

$y'(0) = 2a + 3b + 1 = 14$

... løser ... $a = 2$, $b = 3$

Løsning: $y(t) = 2e^{2t} + 3e^{3t} + 1 + t$.

Oppgave 1.5, 2019

En løsning av differensiallikningen

$$y' = \frac{t^2}{y^2}, \quad y(0) = 2,$$

er gitt ved

A: $y(t) = \sqrt{t^2 + 4}$

B: Likningen har ingen løsning

C: $y(t) = (t^3 + 8)^{1/3}$

D: $y(t) = t + 2$

E: $y(t) = \sqrt{t} + 2$

$$y^2 y' = t^2 \Rightarrow \int y^2 dy = \int t^2 dt$$

$$\Rightarrow \frac{y^3}{\cancel{3}} = \frac{t^3}{\cancel{3}} + 3C \Rightarrow y(t) = (t^3 + 3C)^{1/3}$$

Bestem C: $y(0) = 2 \Rightarrow (3C)^{1/3} = 2 \Rightarrow 3C = 8$

Løsning: $y(t) = (t^3 + 8)^{1/3}$ (svar C).

Oppgave 1.5, 2018

En løsning av differensiallikningen

$$t^2 y'(t) + 2ty(t) = \sin(t),$$

er gitt ved

A: $\frac{3-4\sin(t)}{t^2}$
B: $\frac{1-\sin(t)}{t^2}$
C: $\frac{1-2\cos(t)}{t^2}$
D: $\frac{1-\cos(t)}{t}$
E: $\frac{1-\cos(t)}{t^2}$

Snarvei: Se at

$$(t^2 y)' = t^2 y' + 2ty$$

$$\Rightarrow (t^2 y)' = \sin(t)$$

$$\Rightarrow t^2 y(t) = \int \sin(t)\,dt + C$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{C - \cos(t)}{t^2}$$

$C = 1$ gir svar E.

Vanlig metode: Anta $t > 0$ og skriv om likn:

$$y' + \underbrace{\frac{2}{t}}_{f(t)} y = \underbrace{\frac{\sin(t)}{t^2}}_{g(t)},$$

Antiderivert $F(t) = 2\ln(t)$

Løsningsformel: $y(t) = e^{-F(t)}\left(\int e^{F(s)} g(s)\,ds + C\right)$

$$\boxed{e^{F(s)} = e^{2\ln(s)} = s^2}$$

$$= \frac{1}{t^2}\left(\int \cancel{s^2} \frac{\sin(s)}{\cancel{s^2}}\,ds + C\right)$$

= .. samme løsning som snarveien.

Oppgave 1.6, 2018

Newtonformen til tredjegradspolynomet som interpolerer funksjonen $f(x) = x^4$ i punktene $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ og $x_3 = 2$, er

A: $p_3(x) = 1 + (x+1) + (x+1)x + (x+1)x(x-1)$

B: $p_3(x) = (x+1) + (x+1)x - (x+1)x(x-1)$

C: $p_3(x) = 1 - (x+1) + (x+1)x + 2(x+1)x(x-1)$

D: $p_3(x) = 1$

E: $p_3(x) = 1 + (x+1) + (x+1)x$

Newtonform: $P_3(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x-x_0)(x-x_1)$
$+ C_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$
$= C_0 + C_1(x+1) + C_2(x+1)x + C_3(x+1)x(x-1)$

$P_3(-1) = C_0 = f(-1) = 1$

$P_3(0) = C_0 + C_1 = f(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -C_0 = -1$

$P_3(1) = C_0 + 2C_1 + 2C_2 = f(1) = 1 \Rightarrow 2C_2 = 1 - C_0 - 2C_2 = 2$
$\Rightarrow C_2 = 1$

$P_3(2) = C_0 + 3C_1 + 6C_2 + 6C_3 = f(2) = 16$

$\Rightarrow 6C_3 = 16 - (C_0 + 3C_1 + 6C_2) = 12 \Rightarrow C_3 = 2$

$\Rightarrow P_3(x) = 1 - (x+1) + (x+1)x + 2(x+1)x(x-1)$

(Svar C)

Oppgave 1.7, 2018

Vi bruker Newtons metode med startverdien $x_0 = 0$ til å finne et tall x slik at $e^x = 2 - x$. Da vil den andre iterasjonen x_2 være omtrent lik

A: 0.3877

B: 0.5414

C: 1/2

D: 1

E: 0.4439

Søker nullpunkt til $f(x) = e^x + x - 2$

med $f'(x) = e^x + 1$

Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 0 - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{1}{2} - \frac{f(\frac{1}{2})}{f'(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} - \frac{e^{\frac{1}{2}} - 3/2}{e^{1/2} + 1}$$

$$\approx 0.4439$$

(Svar E)

Oppgave 1.7, 2017

Vi bruker halveringsmetoden på intervallet $[-1, 6]$ til å finne et nullpunkt til funksjonen

$$f(x) = (x + 1/2)(x - 1/2)(x - 1)(x - 3)(x - 4)$$

Metoden vil da konvergere mot

A: 1

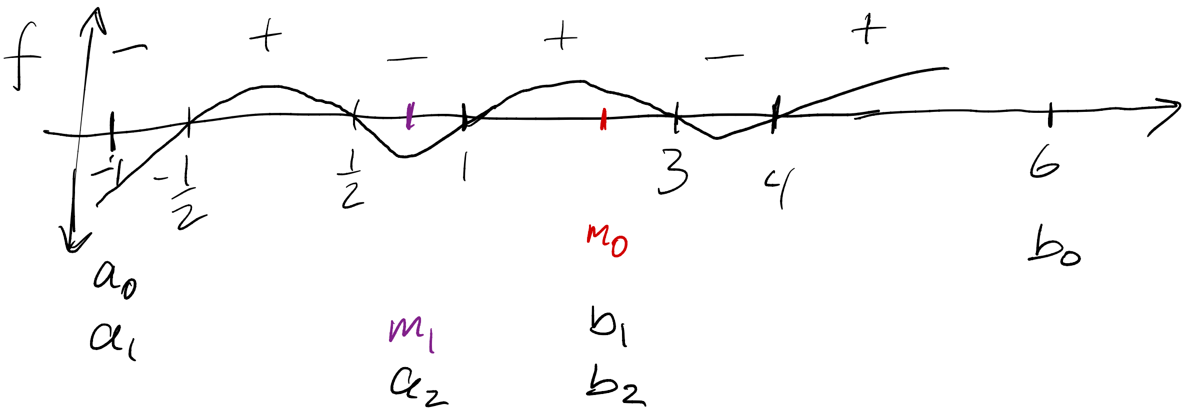
B: $-1/2$

C: 3

D: 4

E: $1/2$

Siden f kun har nullpunkter $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 3, 4$, må f være strengt positiv eller negativ mellom hver av nullpunktene. Kan vise at $f(-1) < 0$ og $f(6) > 6$, som gir oss røff graf (som viser fortegn til f):



$$a_0 = -1,\ b_0 = 6,\ m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{5}{2},\ f(m_0) > 0$$

$$\Rightarrow f(a_0)f(m_0) < 0 \Rightarrow a_1 = a_0 = -1,\ b_1 = m_0 = \frac{5}{2}$$

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow f(m_1) < 0 \Rightarrow f(m_1)f(b_1) < 0$$

$$\Rightarrow a_2 = m_1 = \frac{3}{4},\ b_2 = b_1 = \frac{5}{2}$$

Eneste nullpunkt i $[a_2, b_2] = [\frac{3}{4}, \frac{5}{2}]$ er 1. $\Rightarrow$ konvergens mot 1. Svar A.

Oppgave 1.9, 2019

Hvis vi bruker trapesregelen med fire delintervaller til å regne ut en tilnærming til integralet $\int_0^\pi \sin(x)dx$ får vi omtrent

A: 2

B: 1.8154

C: 1.8961

D: 1.4142

E: 2.4142

$h = \frac{\pi}{4}, \quad x_k = kh \quad k = 0, 1, \ldots, 4.$

$$I = h \cdot \sum_{k=1}^{4} \frac{\sin(x_{k-1}) + \sin(x_k)}{2}$$

$$= h\left(\frac{\sin(x_0) + \sin(x_4)}{2} + \sum_{k=1}^{3} \sin(x_k) \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sin(0) + \sin(\pi)}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1 + \sqrt{2}\right) \approx 1.8961 \quad (\text{svar C}).$$

Oppgave 1.9, 2018

Hvis vi bruker midtpunktmetoden med fire delintervaller til å regne ut en tilnærming til integralet $\int_0^4 x^2 dx$ får vi

A: 21

B: 64/3

C: 30

D: 45/2

E: 20

$h = \frac{4-0}{4} = 1, \quad x_k = k, \quad k = 0, 1, \ldots, 4$

$x_{k-1/2} = k - 1/2, \quad k = 1, 2, 3, 4.$

$$I = h \cdot \sum_{k=1}^{4} \left(x_{k-1/2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 9 + 25 + 49\right) = \frac{84}{4} = 21$$

(Svar A)

Oppgave 1.10, 2019

Vi løser differensiallikningen $x' = x + 2t$ med startverdi $x(0) = 1$ ved hjelp av Eulers metode med steglengde $h = 1$. Da blir tilnærmingen ved tiden $t = 2$

A: 6

B: 6.25

C: 6.5

D: 4

E: 5.5

Vi minner om at Eulers metode med steglengde h for differensiallikningen $x' = f(t, x)$ er gitt ved $x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k)$.

$f(t,x) = x + 2t$, $x_0 = 1$, $t_k = k \cdot h = k$, $k = 0, 1$

$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) = x_0 + f(0,1) = 1 + 1 = 2$

$x_2 = x_1 + hf(t_1, x_1) = 2 + f(1,2) = 2 + 2 + 2 \cdot 1 = 6.$

(Svar A)

Ekstraoppgave (ikke gitt tidligere)

Løs differensiallikningen $x' = x + 2t$ med startverdi $x(0) = 1$ ved hjelp av Eulers midtpunktmetode med steglengde $h = 1$. Hva blir tilnærmingen ved tiden $t = 2$?

Generelt for metoden:

$$x_{k+1/2} = x_k + \frac{h}{2} f(t_k, x_k) \text{ og}$$
$$x_{k+1} = x_k + h f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_{k+1/2}\right)$$

Gitt $f(t,x) = x + 2t$ og $t_k = k \cdot h = k$, $x_0 = 1$, så får vi

$$x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2} f(t_0, x_0) = x_0 + \frac{1}{2}(x_0 + 2t_0) = \frac{3}{2} x_0 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 = x_0 + h f\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_{1/2}\right) = x_0 + x_{1/2} + 2\left(t_0 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 1 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{2}$$

$$x_{3/2} = x_1 + \frac{h}{2} f(t_1, x_1) = x_1 + \frac{1}{2}(x_1 + 2 \cdot t_1)$$
$$= \frac{7}{2} + \frac{7}{4} + 1 = \frac{25}{4}$$

$$x_2 = x_1 + h f\left(t_1 + \frac{h}{2}, x_{3/2}\right) = x_1 + x_{3/2} + 2 \cdot (t_1 + 1/2)$$
$$= \frac{7}{2} + \frac{25}{4} + 3 = \frac{51}{4}.$$

Oppgave 1.10, 2017

Differensiallikningen $x'' + te^{x'+t} = x$ med initialbetingelser $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$ skal skrives som et system av førsteordens differensiallikninger. Hvilket system er riktig?

A: $x' = y$, $y' = -te^{y+t} + x$, $x(1) = 1$, $y(1) = 0$
B: $x' = y$, $y' = te^{y+t} + x$, $x(1) = 1$, $y(1) = 0$
C: $x' = y$, $y' = -te^{y+t} + y$, $x(1) = 1$, $y(1) = 0$
D: $x' = -te^{y+t} + x$, $y' = x$, $x(1) = 1$, $y(1) = 0$
E: $x' = y$, $y' = -te^{y+t} + x$, $x(1) = 0$, $y(1) = 1$

(Oppgaven er redigert slik at (x_1, x_2) er erstattet med (x, y) i svaralternativene.)

Introduser $y := x'$. Det gir

$$y' = x'' = -te^{x'+t} + x = -te^{y+t} + x$$

og system

$$x' = y \qquad \text{med} \qquad x(1) = 1$$
$$y' = -te^{y+t} + x \qquad y(1) = x'(1) = 0$$