Seksjon 1.1 : Kalkulus : Naturlige tall

Definisjon:

Vi skriver $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ for mengden av naturlige tall.

Vi skriver $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ for mengden av hele tall.

Partall: Naturlige tall som er delelig med 2: $\{2, 4, 6, \dots\}$

Oddetall: Naturlige tall som ikke er delelig med 2: $\{1, 3, 5, \dots\}$

Primtall: Naturlige tall ≥ 2 som bare er delelig med 1 og seg selv

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$

Ethvert naturlig tall kan skrives som et produkt av primtall.

Summetegn

Sum av de 10 ~~første~~ kvadrattall: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$

Vi skriver: $\sum_{n=1}^{10} n^2$

Sum av 100 første oddetall: $1 + 3 + 5 + \dots + 199$

Hvordan skrive med summetegn? $1+2\cdot 0 \quad 1+2\cdot 1 \quad 1+2\cdot 2 \quad \dots \quad 1+2(100-1)$

Ser at oddetall nr. n er $1 + 2(n-1) = 2n - 1$

Sum: $\sum_{n=1}^{100} (2n-1)$

Sum av k første oddetall: $\sum_{n=1}^{k} (2n-1)$.

Generelt skriver vi $\sum_{n=k}^{m} a_n = a_k + a_{k+1} + \dots + a_{m-1} + a_m$

Hvis $k > m$ summerer vi ingenting (vi skriver 0).

n: summasjonsindeks

k: nedre summasjonsgrense

m: øvre summasjonsgrense

∞ og $-\infty$ er tillatt.

Eksempel 1 Skriv $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots$ med summetegn.

Løsning:

$$= (-1)^0 + (-1)^1 x^3 + (-1)^2 x^6 + (-1)^3 x^9 + \cdots$$

$$= (-1)^0 x^{3\cdot 0} + (-1)^1 x^{3\cdot 1} + (-1)^2 x^{3\cdot 2} + (-1)^3 x^{3\cdot 3} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n$$

Notasjon fra boka: $0^0 := 1$

Egenskaper med summetegn

(i) $$\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=k}^{m} b_n = \sum_{n=k}^{m} (a_n + b_n)$$

(ii) $$\sum_{n=k}^{m} c a_n = c \sum_{n=k}^{m} a_n$$

(iii) $$\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{l} a_n = \sum_{n=k}^{l} a_n$$

Bevis for (iii):

$$\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{l} a_n = (a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m) + (a_{m+1} + \cdots + a_l)$$

$$= a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_l$$

$$= a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l$$

$$= \sum_{n=k}^{l} a_n \quad \blacksquare \quad (\text{QED})$$

Hvordan skifte indeks i summetegn?

Eksempel 2 Vi ser på $\sum_{k=2}^{10} (-1)^k x^{k+2} = x^4 - x^5 - \cdots + x^{12}$

Vi bytter til indeks i, der $i = k+2$

k løper fra 2 til 10 $\Rightarrow$ i løper fra 4 til 12

$i = k+2 \Rightarrow k = i-2$

Derfor: $$\sum_{k=2}^{10} (-1)^k x^{k+2} = \sum_{i=4}^{12} (-1)^{i-2} x^i = \sum_{i=4}^{12} (-1)^i x^i$$

$\left((-1)^{i-2} = (-1)^i (-1)^{-2} = \frac{(-1)^i}{(-1)^2} = \frac{(-1)^i}{1} = (-1)^i \right)$

Induksjonsbevis (Seksjon 1.2)

Hvordan kan vi finne en formel for summen av de n første tallene?

Finn $\sum_{i=1}^{n} i$ for $n=1, 2, 3, 4$

Vi ser $\sum_{i=1}^{1} i = 1$ $\sum_{i=1}^{2} i = 3$ $\sum_{i=1}^{3} i = 6$ $\sum_{i=1}^{4} i = 10$

Sett $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ $S(1) = 1$ $S(2) = 3$ $S(3) = 6$ $S(4) = 10$

$S(n)$ gir altså summen av de n første tallene for $n=1,2,3,4$!

Spørsmål: Er $S(n)$ lik summen av de n første tallene for alle n?

Vi har uendelig mange påstander (hypoteser):

$$P_n : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Vi fortsetter etter 4:

P_1	1	1
P_2	3	3
P_3	6	6
P_4	10	10
P_5	15	$\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$
P_6	21	$\frac{6 \cdot 7}{2} = 21$

Anta nå at vi fortsetter dette, og klarer å vise at P_k er sann. Er det da slik at P_{k+1} er også sann?

Det vil si, er $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$?

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) \overset{P_k \text{ sann}}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)\cdot 1 \longrightarrow \frac{k}{2}(k+1$$

$$= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)$$

$$= (k+1)\,\frac{k+2}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Altså: P_k er sann $\Rightarrow$ P_{k+1} er også sann!

Vi har dermed vist at $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ er sann for alle n.

n: 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → .... → k → k+1

Generelt om induksjonsbevis

Vi har uendelig mange påstander $P_n, n=1,2,\ldots$ (som feks $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$)

Gjør følgende:

(i) Sjekk at P_1 er riktig

(ii) Anta at P_k er riktig. Bruk dette til å vise at da er P_{k+1} også riktig.

Hvis (i) og (ii) lar seg gjennomføre, så er P_n sann for alle $n = 1, 2, 3, \ldots$

Oppgaver til neste uke om induksjon:

oppgave 2, 4, 5, 6, 10, 18 fra sek. 1.2 i Kalkulus.

Oppgave 6 Vis at $n(n^2+5)$ er delelig med 6 for alle $n \geq 1$

Løsning: Påstand: P_n : $n(n^2+5)$ er delelig med 6.

(i) Er P_1 sann? $1 \cdot (1^2+5) = 1 \cdot 6 = 6$, som er delelig med 6.

(ii) Anta at P_k er sann. det vil si, $k(k^2+5)$ er delelig med 6

Vis at da er P_{k+1} sann, d.v.s., $(k+1)((k+1)^2+5)$ er delelig med 6.

Vi regner ut $(k+1)((k+1)^2+5) = k((k+1)^2+5) + (k+1)^2+5$

$$= k(k^2+2k+1+5) + k^2+2k+1+5$$

$$= k(k^2+5) + k(2k+1) + k^2+2k+6$$

$$= k(k^2+5) + 2k^2+k + k^2+2k+6$$

$$= k(k^2+5) + 3k^2+3k+6$$

$$= \underbrace{k(k^2+5)}_{\text{delelig med 6}} + \underbrace{\underbrace{3k(k+1)}_{\substack{\text{delelig med 3} \\ \text{delelig med 2} \\ \text{siden en av } k,\, k+1 \text{ delelig med 2}}}}_{\text{delelig med 6}} + \underbrace{6}_{\text{delelig med 6}}$$

Det følger at $(k+1)((k+1)^2+5)$ er en sum av tall som er delelig med 6, og er da selv også delelig med 6, slik at P_{k+1} også er sann.

Oppgave 3 Vis med induksjon at $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Løsning: Vi skal vise: P_n : $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(i) P_1 er sann: VS: 1, HS: 1

(ii) Anta at P_k er sann. Vi ser på P_{k+1}:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 \overset{P_k \text{ sann}}{=} \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k+1\right)$$

$$= (k+1)^2 \frac{k^2+4k+4}{4} = (k+1)^2 \frac{(k+2)^2}{4}$$

$$= \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 = \left[\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right]^2$$

Dette viser at P_{k+1} også er sann, og påstanden er dermed sann for alle n.