Seksjon 1.2 i Kalkulus: Mer om induksjon

Eksempel 1.2.4 Bernoullis ulikhet:

Hvis $x \geq -1$, så er $\underbrace{(1+x)^n \geq 1+nx}_{P_n}$, $n \geq 1$

1. Induksjon

(i) Er P_1 sann?

$(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$

$1 + x \geq 1 + x$, som er sant

$\Rightarrow P_1$ er sann

(ii) Anta at $P_1, \dots, P_k$ er sanne (spesielt $(1+x)^k \geq 1+kx$)

Vi må vise at P_{k+1} er sann, dvs at $\underset{VS}{(1+x)^{k+1}} \geq \underset{HS}{1+(k+1)x}$.

$$VS: (1+x)^{k+1} = \underbrace{(1+x)}_{\geq 0 \text{ når } x \geq -1}(1+x)^k \overset{P_k}{\geq} (1+x)(1+kx)$$

$$= 1 + kx + x + kx^2$$

$$= 1 + (k+1)x + \underbrace{kx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + (k+1)x = HS$$

$\left(kx^2 \geq 0 \Downarrow 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x \right)$

Derfor er $VS \geq HS$, slik at P_{k+1} også er sann.

Derfor er P_k sann for alle k.

2. Geometrisk

Viser på funksjonene $f(x) = (1+x)^n$, $g(x) = 1 + nx$

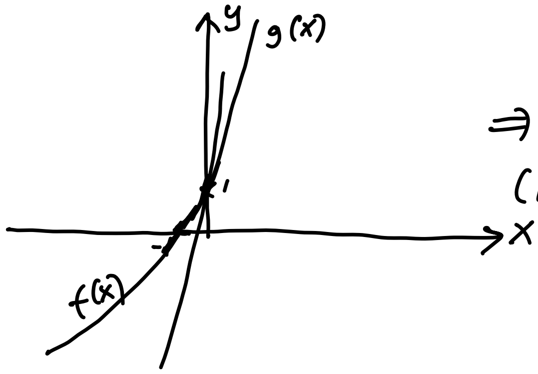
$f(0) = 1$ $\qquad$ $g(0) = 1$

$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ $\qquad$ $g'(x) = n$

$f'(0) = n$ $\qquad$ $g'(0) = n$

$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$

≥ 0 for $x \geq -1$



f legger over g !

$\Rightarrow f(x) \geq g(x)$

$(1+x)^n \geq 1+nx$

Variasjoner av induksjon

P_n kan være definert for $n \geq n_0$.

Ny prosedyre :

(i) Vis at P_{n_0} er sann

(ii) Dersom P_m er sann for $n_0 \leq m \leq k$, vis at P_{k+1} er sann.

Da er P_n sann for alle $n \geq n_0$.

Binomialformelen og Pascals trekant (Seksjon 1.4)

Hvordan regner vi ut $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$?

$$
\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a + b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= \underbrace{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}_{\text{utgjør trekant}}
\end{aligned}
$$

Ser et system: koeffisienten til $a^{n-k}b^k$ i $(a+b)^n$ er lik summen av de to koeffisientene rett over.

Vises ved regning:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = (a^n + c_1 a^{n-1}b + \dots + c_{n-1}ab^{n-1} + b^n)(a+b)$$

$$
\begin{aligned}
\text{koeff } a^{n+1-i}b^i &= \text{koeff } a^{n-i}b^i + \text{koeff } a^{n+1-i}b^{i-1} \\
&= c_i + c_{i+1}
\end{aligned}
$$

koeffisienter i $(a+b)^n$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Dette kalles også for Pascals trekant

Definisjon

La $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq n$. Vi definerer binomialkoeffisienten $\binom{n}{i}$ ved

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!},$$

der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

Merk: $\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{1\cdot 2 \cdots i}$

$1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, ...

$\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = \frac{12}{2} = 6$

$0! = 1$ (konvensjon i boka)

$$\binom{1}{0} = 1 \qquad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \qquad \binom{2}{1} = 2 \qquad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1 \qquad \binom{4}{1} = 4 \qquad \binom{4}{2} = 6 \qquad \binom{4}{3} = 4 \qquad \binom{4}{4} = 1$$

Ser at vi får verdiene fra Pascals trekant!

1.4.2 Binomialformelen

Når vi multipliserer ut $(a+b)^n$, så blir koeffisienten til $a^{n-i}b^i$ lik $\binom{n}{i}$.

Med andre ord: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$

Bevis: Vi definerer P_n : $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$

(i) P_1 sier at $a+b = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 = a+b$,
slik at P_1 er sann.

(ii) Anta nå at $P_1, \dots, P_k$ er sanne. Vi må da vise at P_{k+1} også er sann. Vi har:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$$

$$\overset{P_k}{=} \underbrace{(a+b)\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i}$$

koeff $a^{k+1-i}b^i$ er $\underbrace{\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}}_{C_i + C_{i-1} \text{ fra forrige time.}}$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} \left(\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} \right) a^{k+1-i} b^i$$

Kombinatorikk

Merk: $\binom{k}{i}$ er antall måter å plukke ut i baller fra k baller: $\frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{1\cdot\cdots\cdot i}$

Antall måter å plukke ut i baller fra $k+1$ baller $\left(= \binom{k+1}{i}\right)$

disjunkte muligheter:
- ball 1 plukkes ut: $\binom{k}{i-1}$ muligheter for resterende
- ball 1 plukkes ikke ut: $\binom{k}{i}$ muligheter

Derfor er $\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} a^{k+1-i} b^i$$

Derfor er P_{k+1} også sann (så binomialformelen er sann for alle n.

Alternativt bevis for at $\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}$:

$$\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \frac{k\cdot(k-1)\cdots(k-i+2)}{1\cdot 2\cdots(i-1)} + \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdots i}$$

$$= \frac{k(k-1)\cdots(k-i+2)i + k(k-1)\cdots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots i}$$

$$= \frac{k(k-1)\cdots(k-i+2)\overbrace{(i+k-i+1)}^{k+1}}{1\cdot 2\cdots i}$$

$$= \frac{(k+1)k\cdots(k-i+2)}{1\cdots i}$$

$$= \binom{k+1}{i}$$

Eksempel $\quad \underbrace{\text{Summen av alle binomialkoeffisienter}}$ er 2^n :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Bevis: $2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

2

$4 = 2^2$

$8 = 2^3$

$16 = 2^4$

Oppgaver fra seksjon 1.4 til neste uke: 2b, 3bc, 5, 8

Oppgave 9 $\quad$ Vis at $3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$

Løsning:

$$3^n = (2+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i 1^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i$$