Kap. 2 kalkulus: Reelle tall

$\mathbb{N}$: Naturlige tall

$\mathbb{Z}$: Hele tall

$\mathbb{R}$: Reelle tall (rasjonale og irrasjonale)

Intervaller

Lukket intervall $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Åpent intervall $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Halvåpent intervall: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

a, b kan være $\infty, -\infty$

Tallverdien av et reelt tall a:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{hvis } a \geq 0 \\ -a & \text{hvis } a < 0 \end{cases}$$

Oppgave 2.1.5 i Kalkulus

a) Finn alle x som løser $|x-2| < |x+3|$

Løsning: $(x-2)^2 < (x+3)^2$

$$x^2 - 4x + 4 < x^2 + 6x + 9$$

$$-5 < 10x$$

$$x > -\tfrac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{x \in (-\tfrac{1}{2}, \infty)}}$$

Trekantulikheten (2.1.1 i boka)

Hvis $a, b \in \mathbb{R}$ så er $|a+b| \leq |a| + |b|$

Bevis: Det er klart at: $a \leq |a|$

$$|-a| = |a|$$

$$|a| = \max(a, -a)$$

Derfor: (1) $a + b \leq |a| + |b|$

(2) $-(a+b) = (-a) + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$

Det følger at: $|a+b| = \max(a+b, -(a+b)) \leq |a| + |b|$ ■

Likhet i trekantulikheten: $a = 3$, $b = 2$

$|3+2| = 5$ $\qquad |3| + |2| = 3 + 2 = 5$

Ulikhet i trekantulikheten: $a = 3$, $b = -3$

$|3 + (-3)| = 0$ $\qquad |3| + |-3| = 3 + 3 = 6$

Omvendt trekantulikhet (korollar 2.1.3): $||a|-|b|| \le |a-b|$

Bevises med trekantulikheten:

$$\left.\begin{aligned} |a| &= |(a-b)+b| \le |a-b| + |b| \\ |b| &= |a+(b-a)| \le |a| + |b-a| \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &|a|-|b| \le |a-b| \\ &\underbrace{|b|-|a| \le |b-a|} \\ &-(|a|-|b|) \le |a-b| \end{aligned}$$

$$||a|-|b|| \le |a-b|$$

Seksjon 2.2: Kalkulus: Rasjonale tall

Vi skriver $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b},\ a,b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \}$ for mengden av rasjonale tall

Eksempler irrasjonale tall (tall som ikke er rasjonale): $\pi, e, \sqrt{2}$

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ (sett $b=1$ i definisjonen.

Setning 2.2.1 Hvis x, y er rasjonale, så er $x+y, x-y, xy, \frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$, også rasjonale

Bevis: La $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$

$x+y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$, som er rasjonalt ($ad+cb \in \mathbb{Z}$, $bd \in \mathbb{Z}$)

$\frac{x}{y} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$, som er rasjonalt ∎

Teorem 2.2.4 $\sqrt{2}$ er irrasjonal

Bevis: Anta for motsigelse at $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$
Vi kan anta at a og b ikke har felles faktorer.

se under

Da er $2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ partall $\Rightarrow a$ partall

a partall $\Rightarrow a = 2n$ for en $n \in \mathbb{Z}$:

$$a^2 = 2b^2 \Rightarrow 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2n^2 \Rightarrow b^2 \text{ partall} \Rightarrow b \text{ partall}$$

a og b har altså 2 som en felles faktor, motsigelse.

Derfor er $\frac{a}{b}$ irrasjonal ∎

Lemma 2.2.3 Dersom $a \in \mathbb{N}$ er oddetall, så er a^2 oddetall
(a^2 partall $\Rightarrow a$ partall)

Bevis: Siden a er oddetall, så er $a = 2n-1$, $n \in \mathbb{N}$

$a^2 = (2n-1)^2 = \underbrace{4n^2 - 4n}_{\text{partall}} + 1$, som er et oddetall ∎

$\boxed{\text{Hvis } x \text{ er irrasjonal, } y \text{ rasjonal, så er } x+y \text{ irrasjonal}}$

Bevis: Hvis ikke så ville $x+y=z$, der z er rasjonal

Da er $x = \underset{\text{rasj.}}{z} - \underset{\text{rasj.}}{y}$, som er rasjonalt, motsigelse ∎

Eksempel 1: $\pi + 2$ er irrasjonal

Eksempel 2: $\underset{\text{irr.}}{\pi} - \underset{\text{irr.}}{\pi} = \underset{\text{rasj.}}{0}$

Eksempel 3: $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} - \underset{\text{irr.}}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{5+2\sqrt{5}+1}{5-1} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$= \underset{\text{irr}}{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$= \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3}{2}$,

som er rasjonalt.

2.2.6 : Arkimedes prinsipp

(i) For ethvert $a \in \mathbb{R}$ (uansett hvor stort) finnes $n \in \mathbb{N}$ slik at $n > a$

(ii) For ethvert $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ (uansett hvor lite) finnes $n \in \mathbb{N}$ slik at $\frac{1}{n} < b$

Bevis: (i) Hvis $a < 1$, sett $n = 1$

Ellers er $a \geq 1$. Fjern alle desimaler etter desimalpunktet i a (bruk desimalformen til a), og legg til 1.

Tallet n du da får er større enn a, og $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Bruk (i) til å finne $m \in \mathbb{N}$ s.a. $m > \frac{1}{b}$. Da er $\frac{1}{m} < b$ $\blacksquare$

Setning 2.2.7 Ethvert åpent intervall (a, b) (med $a < b$) inneholder både rasjonale og irrasjonale tall.

Bevis: Det finnes et rasjonalt tall i (a,b):

La $m \in \mathbb{N}$ slik at $\frac{1}{m} < b - a$ (Ark. prinsipp (ii))

Jeg påstar det finnes $k \in \mathbb{N}$ slik at $\frac{k}{m} \in (a, b)$ ($\Rightarrow \frac{k}{m}$ er tallet vi ser etter)

La k være det minste hele tallet slik at $k > am$ (Ark. prinsipp (i))

$$\Rightarrow \frac{k}{m} > a$$

Vi har også $\frac{k}{m} = \frac{k-1}{m} + \frac{1}{m} \leq a + \frac{1}{m} < a + (b-a) = b$

$\Rightarrow \frac{k}{m} \in (a, b)$

Det finnes et irrasjonalt tall i (a, b):

Vi har $c = \frac{k}{m} \in (a, b)$

Velg $p \in \mathbb{N}$ så stor at $c + \frac{\sqrt{2}}{p} < b$ $\left(\Leftrightarrow \frac{1}{p} < \frac{b-c}{\sqrt{2}} \right)$ Ark prinsipp (ii)

Da er $\underset{\text{rasj.}}{c} + \underset{\text{irr.}}{\frac{\sqrt{2}}{p}} \in (a, b)$, og $c + \frac{\sqrt{2}}{p}$ er irrasjonalt.

Oppgave 2.2.11

Vis at dersom $\cos x$ er irrasjonal, så er $\cos\frac{x}{2}$ og $\sin\frac{x}{2}$ det også.

Løsning: $\cos\frac{x}{2}$

Siden $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, så er $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$

$$\cos^2\frac{x}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}\underbrace{(\underset{\uparrow\,\text{irr}}{\cos x} + 1)}_{\text{irr}}}_{\text{irr}}$$

Det følger at $\cos^2\frac{x}{2}$ er irrasjonal, men da er også $\cos\frac{x}{2}$ irrasjonal.

$\sin\frac{x}{2}$ vises tilsvarende $(\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x)$

Seksjon 2.3: Kompletthet av de reelle tallene

La $\mathbb{C}$ være mengden av komplekse tall. Vi har at

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Observasjon: Likningen $x^2 - 2 = 0$ har en løsning i $\mathbb{R}$, men ikke i $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

Kompletthet brukes for å beskrive slike mengder som $\mathbb{R}$ ("uten hull")

Definisjon:

$A \subseteq \mathbb{R}$ kalles oppad begrenset hvis det finnes $b \in \mathbb{R}$

s.a. $a \leq b$ for alle $a \in A$

b kalles da for en øvre skranke for A

b kalles for den minste øvre skranken for A, dersom b er en øvre skranke, og er mindre enn alle andre øvre skranker for A

Vi skriver også $b = \sup(A)$ (supremum)

Nedre skranke, største nedre skranke defineres tilsvarende.

$\inf(A)$ (infimum)

Eks: $A = [a, b]$

Kompletthetsprinsippet

Enhver ikketom begrenset delmengde $A \subseteq \mathbb{R}$ har en minste øvre skranke i $\mathbb{R}$

Bytter du ut $\mathbb{R}$ med $\mathbb{Q}$, så er ikke resultatet riktig!

Oppgaver Kap. 2 Kalkulus

2.1 1bef, 2, 3bef, 4bce, 8, 9, 10

2.2 3, 5, 8, 9

2.3: 1, 3, 5

2.4: 4

Oppgave 2.3.6

La A, B være ikke tomme, begrensede mengder.

Definer $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$.

a) Vis at $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$

Løsning: La $a \in A$, $b \in B$. Da er $a+b \leq \sup A + \sup B$

men da er $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$

Å vise at $\sup(A+B) \geq \sup A + \sup(B)$ er vanskeligere:

Siden $\sup A$, $\sup B$ er minste øvre skranker for A og B, så finnes, for gitt ε, $a \in A$, $b \in B$ slik at

$$\left.\begin{array}{l} a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \\ b > \sup B - \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow a+b \geq \sup A + \sup B - \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\sup(A+B) \geq \sup A + \sup B - \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\sup(A+B) \geq \sup A + \sup B$$

$\blacksquare$