Kompendiet, Kap. 2

På en datamaskin representeres alt med 0 og 1. Hvorfor?

1. Egner seg bra for elektronikk (av/på for strøm i en krets)
2. Robusthet med tanke på å representere data.
3. Enkelt å gjøre beregninger på laveste (atomært) nivå (true/false)

Kap. 3

Spørsmål: Hva er et reelt tall

Svar: Et desimaltall med uendelig mange sifre.

Spørsmål: Hva er forskjellen mellom rasjonale og irrasjonale tall?

Svar: Kun rasjonale tall har et repeterende mønster i sifrene.

Eksempel: Vis at $\frac{1}{7} = 0.\underbrace{142857}_{\text{repeteres}}142857\ldots$

Løsning: Vi har at

$$0.\underbrace{142857}_{6\text{ sifre}}\underbrace{142857}_{6\text{ sifre}}\ldots = 0.142857\left(1 + 10^{-6} + 10^{-12} + \ldots\right)$$

Dette er en uendelig geometrisk rekke

Vi vet at $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 k^n = \frac{a_0}{1-k}$ når $|k|<1$

Her er $k = 10^{-6}$

$$= \frac{0.142857}{1-10^{-6}} = \frac{142857}{10^6-1} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$$

Merk: $e = 2.718281828\ldots$ har ikke repeterende mønster i sifrene!

Eksempel: Vis at $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$, der 3 gjentas.

Løsning: $0.3333\ldots = 3\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + \cdots$

$$= \frac{3\cdot 10^{-1}}{1-10^{-1}} = \frac{3}{10-1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Merk: Vi har ikke entydig desimalrepresentasjon av reelle tall: $1.0000\ldots = 0.9999\ldots$.

Når vi skriver desimaltallet 116.5, så er dette egentlig en representasjon i 10-tallsystemet:

$$116.5 = 1\cdot 10^2 + 1\cdot 10^1 + 6\cdot 10^0 + 5\cdot 10^{-1}$$

Vi skriver og $116.5 = 116.5_{10}$ indikerer tallsystemet.

Vi kan også skrive 116.5 i totallsystemet:

$$116.5 = \underbrace{1\cdot 2^6}_{64} + \underbrace{1\cdot 2^5}_{32} + \underbrace{1\cdot 2^4}_{16} + 0\cdot 2^3 + \underbrace{1\cdot 2^2}_{4} + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 + \underbrace{1\cdot 2^{-1}}_{0.5}$$

Vi skriver også $116.5 = 1110100.1_2$

I eksemplene over: 10 og 2 kalles for grunntall

Betegnes ofte med β

Definisjon 3.4 Anta $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$, og at $n_0, n_1, \ldots, n_{\beta-1}$ er sifrene våre.

(Sifre i
- 2-tallsystemet: $0, 1$
- 10-tallsystemet: $0, 1, \ldots, 9$
- 16-tallsystemet: $0, \ldots, 9, a, b, c, d, e, f$ (heksadesimale tallsystemet))

En representasjon i β-tallsystemet er en samling sifre $(d_k\ d_{k-1} \cdots d_0)_\beta$ der hvert siffer d_i er en av $n_0, n_1, \ldots$.

Dette tolkes som det naturlige tallet

$$d_k \beta^k + d_{k-1}\beta^{k-1} + \cdots + d_1 \beta + d_0 \beta^0$$

Lemma 3.5 Ethvert naturlig tall kan representeres unikt i β-tallsystemet

Notasjon vi trenger for beviset:

Hvis a og b er heltall så er $\begin{cases} a // b & \text{heltallsdel når } a \text{ deles med } b. \\ a \% b & \text{resten i divisjonen.} \end{cases}$

Merk: Ethvert naturlig tall a kan skrives unikt som $a = rb + s$, der $0 \leq s < b$. Da er $r = a // b$, $s = a \% b$

Eksempel: $5 // 3 = 1$, $5 \% 3 = 2$, slik at

$$5 = \underbrace{1}_{5//3} \cdot 3 + \underbrace{2}_{5\%3}$$

Oppgave 3.1.3c) $a = -29$, $b = 7$. Hva er $a // b$, $a \% b$

Løsning: $-29/7 \approx -4.14 \Rightarrow -29 // 7 = -5$

$a \% b$: $a - (a // b) b = -29 - (-5) 7 = -29 + 35 = 6$

$\Rightarrow -29 = \underline{(-5)} \cdot 7 + \underline{6}$

Bevis for lemma 3.5 ved eksempel som også gir algoritme for å finne sifrene

Vi ser på $a = 1318$, $\beta = 4$.
Siden $4^6 = 4096 > 1318$, en repetisjon kan ikke inneholde mer enn 6 sifre:

$$1318 = d_5 4^5 + d_4 4^4 + \cdots + d_1 4 + d_0 \quad ((d_5 d_4 \ldots d_1 d_0)_\beta)$$

Hva må d_0 være? Skriv om:

$$1318 = 4\underbrace{(d_5 4^4 + d_4 4^3 + \cdots + d_1)}_{\text{må være } 1318//4 = 329} + \underbrace{d_0}_{\text{må være } 1318\%4 = \underline{2}}$$

Derfor $329 = d_5 4^4 + d_4 4^3 + \cdots + d_1$

$$= 4\underbrace{(d_5 4^3 + d_4 4^2 + d_3 \cdot 4 + d_2)}_{\text{må være } 329//4 = 82} + \underbrace{d_1}_{\text{må være } 329\%4 = \underline{1}}$$

Derfor $$82 = d_5 4^3 + d_4 4^2 + d_3 \cdot 4 + d_2$$
$$= 4\underbrace{(d_5 4^2 + d_4 4 + d_3)}_{\text{må være } 82//4 = 20} + \underbrace{d_2}_{\text{må være } 82\%4 = \underline{2}}$$

Derfor $$20 = d_5 4^2 + d_4 \cdot 4 + d_3$$
$$= 4\underbrace{(d_5 \cdot 4 + d_4)}_{\text{må være } 20//4 = 5} + \underbrace{d_3}_{\text{må være } 20\%4 = \underline{0}}$$

Derfor $$5 = \underbrace{d_5}_{\text{må være } 5//4 = \underline{1}} \cdot 4 + \underbrace{d_4}_{\text{må være } 5\%4 = \underline{1}}$$

Alt i alt: $$1318 = d_5 4^5 + d_4 4^4 + \cdots + d_0$$
$$= 1 \cdot 4^5 + 1 \cdot 4^4 + 0 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 2 \quad \} \text{ kontrollregn}$$
$$= (1\ 1\ 0\ 2\ 1\ 2)_4$$

Vi ser: alle sifrene blir unike, og prosedyren vil virke for ethvert naturlig tall ■

All regning kan raskt oppsummeres i en tabell:

	1318	$\xrightarrow{\%4}$	2
//4	↓		
	329	$\xrightarrow{\%4}$	1
//4	↓		
	82	$\xrightarrow{\%4}$	2
//4	↓		
	20	$\xrightarrow{\%4}$	0
//4	↓		
	5	$\xrightarrow{\%4}$	1
//4	↓		
	1	$\xrightarrow{\%4}$	1
//4	↓		
	0		

Algoritme 3.6

La a være et tall som i β-tallsystemet har $k+1$ sifre, $a = (d_k \cdots d_0)_\beta$. Disse sifrene kan finnes slik:

$a_0 = a$
for $i = 0, \dots, k$
  $d_i = a_i \% \beta$
  $a_{i+1} = a_i // \beta$

eller:

for $i = 0, \dots, k$
  $d_i = a \% \beta$
  $a = a // \beta$

eller: while $a > 0$

$d_i = a \% \beta$

$a = a // \beta$

$i = i+1$

Konvertere mellom base 2 og 16:

Observasjon: En representasjon på 4 sifre i 2-tallsystemet (binært tall med 4 sifre) kan alltid konvertes til et heksadesimalt tall.

Bevis: Følger av at $d_3 2^3 + d_2 \cdot 2^2 + d_1 \cdot 2^1 + d_0 < 16$, som svarer til et siffer i 16-tallsystemet.

Konvertere $(\dots d_2 d_1 d_0)_2$ til base 16:

Skriv som $d_0 + d_1 \cdot 2 + d_2 \cdot 2^2 + d_3 \cdot 2^3 + d_4 2^4 + \dots$

$$= \underbrace{d_0 + d_1 2 + d_2 2^2 + d_3 2^3}_{\text{konverter til hex: siffer } e_0} + 2^4 \underbrace{(d_4 + d_5 \cdot 2 + d_6 2^2 + d_7 2^3)}_{\text{konverter til hex: siffer } e_1} + \dots$$

$$= e_0 + 2^4 e_1 + \dots$$

$$= e_0 + 16 e_1 + 16^2 e_2 + \dots$$

$$= (\dots e_1 e_0)_{16}$$

Kan altså konvertere 4 sifre om gangen.