Sek. 3.2 : kompendiet forts.

Fra sist: Vi kan konvertere fra base 2 til base 16 ved å ta for oss 4 binære sifre om gangen.

Konvertere $(\dots d_2 d_1 d_0)_{16}$ til base 2:

Skriv som $d_0 + d_1 \cdot 16 + d_2 \cdot 16^2 + \dots$

$$= \underbrace{(a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3)}_{d_0 \text{ konvertert til binært}} + \underbrace{(b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + b_3 \cdot 2^3)}_{d_1 \text{ konvertert til binært}} \cdot 16 + \dots$$

$$= a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 2^3 + b_0 \cdot 2^4 + b_1 \cdot 2^5 + b_2 \cdot 2^6 + b_3 \cdot 2^7 + \dots$$

$$= (\dots b_3 b_2 b_1 b_0 a_3 a_2 a_1 a_0)_2$$

Så, sifre kan konverteres ett om gangen denne veien også.

Oppgaver fra sek. 3.2: 1, 2ab, 5bf, 6cf, 7, ekstraoppgave.

Oppgave 3.2.2 (kompendiet)

c) Konverter 17 til base 2

(enklest: $17 = 16 + 1 = 2^4 + 1 = (\underset{1\cdot 2^4}{1}\,\underset{0\cdot 2^3}{0}\,\underset{0\cdot 2^2}{0}\,\underset{0\cdot 2^1}{0}\,\underset{1\cdot 2^0}{1})_2$)

algoritme:

$$\begin{array}{rcccl}
 & 17 & \xrightarrow{\%2} & 1 & = d_0 \\
//2 & \downarrow & & & \\
 & 8 & \xrightarrow{\%2} & 0 & = d_1 \\
//2 & \downarrow & & & \\
 & 4 & \xrightarrow{\%2} & 0 & = d_2 \\
//2 & \downarrow & & & \\
 & 2 & \xrightarrow{\%2} & 0 & = d_3 \\
//2 & \downarrow & & & \\
 & 1 & \xrightarrow{\%2} & 1 & = d_4 \\
//2 & \downarrow & & & \\
 & 0 & & &
\end{array}$$

Dette gir $17 = 10001_2$

f) 126 til base 16 $126 - 7\cdot 16 = 14 = e$

$126 \xrightarrow{\%16} e = d_0$

$/\!/16 \downarrow$

$7 \xrightarrow{\%16} 7 = d_1$

$/\!/16 \downarrow$

0

Dette gir $\underbrace{126 = 7e_{16}}_{7\cdot 16^1 + 14 = 112 + 14 = 126}$

Konvertere mellom base 2 og base 8

Her kan vi ta for oss 3 binære sifre om gangen.

Oppgave 3.2.3

c) Skrive 10101010_2 i base 8:

$$\underbrace{010}_{=2_8}\ \underbrace{101}_{1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 5 = 5_8}\ \underbrace{010_2}_{1\cdot 2^1 = 2_8} = 252_8$$

Oppgave 3.2.4

a) Skriv 44_8 i base 2

$$44_8 = \underbrace{100}_{4_8 = 4}\ \underbrace{100_2}_{4_8 = 4}$$

Oppgave 3.2.5

a) Konverter 1001101_2 til base 16:

Løsning:

$$\underbrace{0100}_{2^2 = 4 = 4_{16}}\ \underbrace{1101_2}_{2^3 + 2^2 + 0 + 1 = 13 = d_{16}} = 4d_{16}$$

Oppgave 3.2.6

a) Konverter $3c_{16}$ til base 2

$$3_{16} = 3 = 2^1 + 1 = 0011_2$$
$$c_{16} = 12 = 2^3 + 2^2 = 1100_2$$

Derfor: $3c_{16} = 0011\ 1100_2 = \underline{\underline{11\ 1100_2}}$

Oppgave 3.2.8

b) Finn en β slik at $25 = 100_\beta$

Løsning: Vi må ha: $1 \cdot \beta^2 + 0 \cdot \beta + 0 \cdot 1 = \beta^2 = 25 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 5}}$

Finn en β slik at $841 = 100_\beta$:

Løsning: $\beta^2 = 841 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 29}}$

Generelt, for hvilke a er $a = 100_\beta$?

Løsning: $a = \beta^2 \Rightarrow a$ må være kvadrattall.

Seksjon 3.3: Representasjon av desimaltall

Vi skal se på uttrykk på formen

$$d_{-1}\beta^{-1} + d_{-2}\beta^{-2} + d_{-3}\beta^{-3} + \dots,$$

kan være uendelig mange ledd!

der β og sifre er definert som før.

Vi skriver $(0.d_{-1}d_{-2}d_{-3}\dots)_\beta$ for en slik representasjon.

Alle slike tall er i $[0,1]$ siden

$$d_{-1}\beta^{-1} + d_{-2}\beta^{-2} + \dots \leq (\beta-1)\beta^{-1} + (\beta-1)\beta^{-2} + (\beta-1)\beta^{-3} + \dots$$
$$= \frac{(\beta-1)\beta^{-1}}{1-\beta^{-1}} = \frac{(\beta-1)}{\beta-1} = 1$$

Spesielt er altså $(0.(\beta-1)(\beta-1)(\beta-1)\cdots)_\beta = 1$

Kan bare få 1 hvis vi har $\beta - 1$ hele veien.

Siden $0.11111\ldots_2 = 1 = 1.00\ldots$, ingen unik representasjon.

<u>Eksempel:</u> $0.25 = 2^{-2}$, slik at $0.25 = 0.\underset{0\cdot 2^{-1}}{0}\underset{1\cdot 2^{-2}}{1}{}_2$

<u>Konvertere brøker til β-tallsystemet</u>

Hvordan skrive $1/5$ i 8-tallsystemet? Skal løse

$$\frac{1}{5} = d_{-1}\, 8^{-1} + d_{-2}\, 8^{-2} + \cdots$$

gang med 8 på begge sider:

$$\frac{8}{5} = \underline{1} + \frac{3}{5} = \underline{d_{-1}} + \underbrace{d_{-2}\, 8^{-1} + d_{-3}\, 8^{-2} + \cdots}_{\text{mellom } 0 \text{ og } 1} \quad \Rightarrow \underline{d_{-1} = 1}$$

må være like

$$\frac{3}{5} = d_{-2}\, 8^{-1} + d_{-3}\, 8^{-2} + \cdots$$

gang med 8:

$$\frac{24}{5} = \underline{4} + \frac{4}{5} = \underline{d_{-2}} + d_{-3}\, 8^{-1} + d_{-4}\, 8^{-2} + \cdots \quad \Rightarrow \underline{d_{-2} = 4}$$

$$\frac{4}{5} = d_{-3}\, 8^{-1} + d_{-4}\, 8^{-2} + \cdots$$

gang med 8:

$$\frac{32}{5} = \underline{6} + \frac{2}{5} = \underline{d_{-3}} + d_{-4}\, 8^{-1} + d_{-5}\, 8^{-2} + \cdots \quad \Rightarrow \underline{d_{-3} = 6}$$

$$\frac{2}{5} = d_{-4}\, 8^{-1} + d_{-5}\, 8^{-2} + \cdots$$

gang med 8:

$$\frac{16}{5} = \underline{3} + \frac{1}{5} = \underline{d_{-4}} + d_{-5}\, 8^{-1} + \cdots \quad \Rightarrow \underline{d_{-4} = 3}$$

$$\frac{1}{5} = d_{-5}\, 8^{-1} + d_{-6}\, 8^{-2} + \cdots$$

Det var her vi startet, så det vi har regnet ut vil gjentas

i det uendelige. Derfor: $\frac{1}{5} = 0.14631463\ldots_8$?
der 1463 gjentas videre.

Derfor: For alle rasjonale tall i $(0,1)$ vil sifrene gjentas i β-systemet, og vi har unikhet så lenge vi unngår uendelig mange $\beta-1$ etter hverandre.

Andre veien gjelder også:

Har vi en repeterende sifferutvikling så er tallet rasjonalt.

(se på $0.142857142857\ldots$ Dette kan skrives som en geometrisk rekke. På grunn av summeformelen for denne blir tallet rasjonalt.

Algoritme 3.20

La $a = \frac{b}{c}$ være et rasjonalt tall i $(0,1)$
De første k sifrene i β-tallsystemet kan da regnes ut som:

$$\begin{aligned}
&\text{for } i = -1, -2, \ldots, -k \\
&\quad d_i = (b \cdot \beta) // c \\
&\quad b = (b \cdot \beta) \% c
\end{aligned}$$