Kap. 3 forts.

Oppgave: Konverter $1/10$ til 2-tallsystemet.

Løsning: $b = 1$, $c = 10$:

$$
\begin{array}{lll}
b = 1 & \longrightarrow & (1\cdot 2)//10 = \underline{0 = d_{-1}} \\
\downarrow & & \\
b = (1\cdot 2)\%10 = 2 & \longrightarrow & (2\cdot 2)//10 = \underline{0 = d_{-2}} \\
\downarrow & & \\
b = (2\cdot 2)\%10 = 4 & \longrightarrow & (4\cdot 2)//10 = \underline{0 = d_{-3}} \\
\downarrow & & \\
b = (4\cdot 2)\%10 = 8 & \longrightarrow & (8\cdot 2)//10 = \underline{1 = d_{-4}} \\
b = (8\cdot 2)\%10 = 6 & \longrightarrow & (6\cdot 2)//10 = 1 = d_{-5} \\
b = (6\cdot 2)\%10 = 2 & \longrightarrow & \ldots\ldots
\end{array}
$$

Vi ser at 0011 vil gjentas i det uendelige, slik at

$$\frac{1}{10} = 0.0\underbrace{0011}\,\underbrace{0011}\,\underbrace{0011}\ldots_2$$

Kontrollregne:

$$\underset{2^{-1}2^{-2}2^{-3}2^{-4}}{0.0011_2} = 2^{-3} + 2^{-4} = \frac{3}{16}$$

$$0.\underbrace{0011}\,\underbrace{0011}\,\underbrace{0011}\ldots_2 = \frac{3}{16}\left(1 + 2^{-4} + 2^{-8} + \ldots\right)$$

$$= \frac{3}{16}\,\frac{1}{1-2^{-4}} = \frac{3}{16}\,\frac{16}{16-1} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 0.0\underbrace{0011}\,\underbrace{0011}\ldots = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \underline{\frac{1}{10}}$$

Ikke vanskelig å se at alle tall i $(0,1)$ kan fås ved en desimal representasjon i β-tallsystemet.

Konvertere generelle tall til β-tallsystemet

La oss se på $\frac{1}{5} = 0.2$ i 8-tallsystemet:

$$0.2 = d_{-1} 8^{-1} + d_{-2} 8^{-2} + \cdots$$

gang med 8:

$$1.6 = \underline{1} + 0.6 = \underline{d_{-1}} + d_{-2} 8^{-1} + \cdots \Rightarrow d_{-1} = 1 = \lfloor a \cdot 8 \rfloor$$

$$0.6 = d_{-2} 8^{-1} + d_{-3} 8^{-2} + \cdots$$

$$a \to a \cdot 8 - d_{-1}$$

Slik kan vi fortsette videre. Dette gir

Algoritme 3.16

Anta $a \in (0,1)$ har $d_{-1}, d_{-2}, \ldots, d_{-k}$ som sine første k sifre i β-tallsystemet. Disse sifrene kan fås ved

for $i = -1, \ldots, -k$
  $d_i = \lfloor a \cdot \beta \rfloor$
  $a = a \cdot \beta - d_i$

Konvertering mellom 2-talls og 16-talls-systemet kan gjøres siffer for siffer også for desimaltall.

Lemma 3.22 Representasjonen av et desimaltall i β-tallsystemet har endelig mange sifre hvis og bare hvis $a = \frac{b}{c}$, og alle primfaktorene i c deler β.

Bevis: $\Rightarrow$: Anta $a = (0.d_{-1}d_{-2}\cdots d_{-k})_\beta$

Da er $a = d_{-1}\beta^{-1} + d_{-2}\beta^{-2} + \cdots + d_{-k}\beta^{-k}$

$$= \frac{d_{-1}\beta^{-1+k} + \cdots + d_{-k}}{\beta^k},$$ som er rasjonal, med

$b = d_{-1}\beta^{-1+k} + \dots + d_{-k}$, $\quad c = \beta^k$

Vi ser at alle primfaktorene i c deler β

(β^k og β har de samme primfaktorene)

$\Leftarrow$: Anta $a = \frac{b}{c}$, og at alle primfaktorene i c deler β

Bevis ved eksempel:

Anta $a = \frac{8}{9}$, $\beta = 6$ (primfaktorene i $c=9$, er 3, og $\beta=6$ er delelig med 3)

Skriv $\frac{8}{9} \overset{\text{gonget med 4}}{=} \frac{32}{\underset{\text{potens av } \beta}{36}}$ (lar seg gjøre når c bare inneholder primfaktorer fra β)

32 kan skrives i 6-tallsystemet: $32 = 5 \cdot 6 + 2 = 52_6$

$$\Rightarrow \frac{32}{36} = \frac{5\cdot 6+2}{6^2} = 5 \cdot 6^{-1} + 2 \cdot 6^{-2} = 0.52_6, \quad \blacksquare$$

som har endelig mange sifre.

Oppgaver seksjon 3.3: 1, 2, 3 abefg, 4, 6, 7, 8

Oppgave 3.3.3 (c)

Konverter $\frac{1}{9}$ til base 3

$b = 1 \longrightarrow (1 \cdot 3) // 9 = 0 = d_{-1}$

$\downarrow$

$b = (1\cdot 3) \% 9 = 3 \longrightarrow (3 \cdot 3) // 9 = 1 = d_{-2}$

$\downarrow$

$b = (3 \cdot 3) \% 9 = 0$

Derfor: $\frac{1}{9} = 0.01_3$

Seksjon 3.4 Aritmetikk i base β

Addisjon

addisjon av sifre i base 8:

$$5_8 + 6_8 = 5 + 6 = 11 = 1\cdot 8 + 3 = \underline{13_8}$$

Legge sammen tall med flere sifre:

$$457_8 + 325_8$$

$$= \begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 457_8 \\ +\;325_8 \\ \hline 1004_8 \end{array}$$

$7_8 + 5_8 = 7 + 5 = 12 = 8 + 4$
$= 14_8$

$1_8 + 5_8 + 2_8 = 1 + 5 + 2 = 8$
$= 10_8$

$1_8 + 4_8 + 3_8 = 1 + 4 + 3 = 8$
$= 10_8$

Subtraksjon:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 8\,8} \\ \cancel{3}\cancel{2}1_8 \\ -\;177_8 \\ \hline 122_8 \end{array}$$

$8 + 1_8 - 7_8 = 8 + 1 - 7 = 2_8$

$8 + 1_8 - 7_8 = \cdots = 2_8$

$2_8 - 1_8 = 1_8$

Multiplikasjon

Gangetabell i base 4:

	1_4	2_4	3_4
1_4	1_4	2_4	3_4
2_4	2_4	10_4	12_4
3_4	3_4	12_4	21_4

$$\begin{array}{r} 312_4 \times 12_4 \\ \hline 1230_4 \\ 312_4 \\ \hline 11010_4 \end{array} \quad : \quad \begin{array}{r} 312_4 \times 2_4 \\ \hline 10_4 \\ 2_4 \\ 12_4 \\ \hline 1230_4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 312_4 \times 1_4 \\ \hline 312_4 \end{array}$$

Oppgaver sek. 3.4: 1, 2ac, 3abc, 4ab

Oppgave 2(e):

$$\begin{array}{r} 43_5 \\ +\ 10_5 \\ \hline 103_5 \end{array}$$

$3_5 + 0_5 = 3+0 = 3 = 3_5$

$4_5 + 1_5 = 4+1 = 5 = 10_5$

Oppgave 3(e)

$$\begin{array}{r} \overset{5}{\cancel{4}}3_5 \\ -\ 14_5 \\ \hline 24_5 \end{array}$$

$5 + 3_5 - 4_5 = 5+3-4 = 4 = 4_5$

$3_5 - 1_5 = 2 = 2_5$

Oppgave 4 (f)

$$\begin{array}{r} 210_3 \cdot 12_3 \\ \hline 1120_3 \\ 210_3 \\ \hline 10220_3 \end{array}$$

$210_3 \cdot 1_3 = 210_3$

$$\begin{array}{r} 210_3 \cdot 2_3 \\ \hline 1120_3 \end{array}$$

$3 = 10_3$