

Kompendiet Kap. 4: Hvordan representeres tall på en datamaskin?

Alt representeres med 0 eller 1 : 1 bit

1 byte = 8 bits

1 KB = 1000 bytes

1 MB = 1000 KB

1 GB = 1000 MB

1 TB = 1000 GB

1 PB = 1000 TB (Petabyte)

På datamaskin: Man bruker ofte 32 eller 64 bits per tall.
(float eller double)

Representasjon av heltall

Med 64 bits kan vi representere:

$$\underbrace{-2^{63}, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots}_{2^{63} \text{ tall}}, \underbrace{\dots, 2^{63}-1}_{2^{63} \text{ tall}}$$

Feks kan vi representere fortegnet med en bit,
og resterende 63 bits for tallet (rep. i 2-tallsystemet
som vi er vant til)

Representasjon av reelle tall

Reelle tall: Har endelig antall sifre før punktum
kan ha endelig mange sifre etter punktum.
(heltallsdel / desimaldel)

Normalformen til et reelt tall a (base 10):

$$a = b \cdot 10^n, \text{ der } \frac{1}{10} \leq |b| < 1, n \in \mathbb{Z}$$

Normalformen (base 2):

$$a = b \cdot 2^n, \text{ der } \frac{1}{2} \leq |b| < 1, n \in \mathbb{Z}$$

b kalles signifikand

n kalles eksponent

Eks base 10: $a = 7, 7 = 0.7 \times 10^1$

signifikand $b = 0.7$

eksponent $n = 1$

Eks base 2: $a = \frac{1}{16} = 2^{-4} = 1 \cdot 2^{-4}$
 $= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^{-4} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-3}$

signifikand $b = 0.5$

eksponent $n = -3$

64 bits flyttall på datamaskin bruker

53 bits for signifikanden

11 bits for eksponenten.

Gir 15-17 signifikante sifre i desimalsystemet
(tar bort bit for for-tegn):

$$2^{52} = 10^{\log 2^{52}} = 10^{52 \log 2} \approx 4.5 \cdot 10^{15}$$

Hva er det største positive tallet maskinen kan representere?

Svar: største eksponent: $2^{10} - 1 = 1023$

største tall: $1 \cdot 2^{1023} \approx 8.99 \cdot 10^{307}$

Hva er det minste ^{positive} tallet maskinen kan representere?

Svar: minst eksponentdel (10 bits for negativ verdi):

$$-2^{10} = -1024$$

$$\text{minste tall: } \frac{1}{2} \cdot 2^{-1024} = 2^{-1025} \approx 2.8 \times 10^{-309}$$

Aritmetikk med flyttall og avrundingsfeil.

Regel for å addere to flyttall a og b på normalform (10-tallsystemet):

1. Anta a er størst i absoluttverdi, og skriv a på

$$\text{normalform: } a = \alpha \cdot 10^n, \quad \frac{1}{10} \leq \alpha < 1.$$

$$\text{skriv } b \text{ med samme eksponent: } b = \beta \cdot 10^n$$

2. Adder "signifikandene": $\gamma = \alpha + \beta$

3. Konverter $c = \gamma \cdot 10^n$ til normalform: $\hat{\gamma} \cdot 10^m$

To problemer når vi bruker maskinens representasjon av tall:

1. Når b bruker n som eksponent, mister vi kanskje sifre i representasjonen.

2. Mister kanskje sifre i representasjon når vi regner ut $\alpha + \beta$

Eksempel La $a = 7.923$, $b = 4.621$

Adder disse på normalform når man bruker 4 sifre for signifikanden (i 10-tallsystemet)

Løsning: steg 1: a er størst, og $a = 0.7923 \cdot 10^1$

$$b \text{ med samme eksponent: } 0.4621 \cdot 10^1$$

↑
mistet ikke sifrer.

steg 2: Adder signifikandene:

$$\begin{array}{r} 0.\overset{1}{7}923 \\ + 0.4621 \\ \hline 1.2544 \end{array}$$

← mister

steg 3: 1.254×10^1
 $= 0.1254 \times 10^2$

avrundingsteil: $1.2544 \rightarrow 1.254$

(4 riktige siffter)

avrundingsteil av andre typen.

Eksempel

La $a = 7.923$, $b = 0.4621$

Adder når 4 sifre for signifikand

Løsning:

steg 1: a er størst og $a = 0.7923 \cdot 10^1$

$b = 0.0462 \cdot 10^1$
 eneren ↑ ble borte

steg 2: Adder signifikander:

$$\begin{array}{r} 0.7923 \\ 0.0462 \\ \hline 0.8385 \end{array}$$

← mister ikke siffter

steg 3: 0.8385×10^1

avrundingsteil: $0.83851 \times 10^1 \rightarrow 0.8385 \times 10^1$
 4 riktige siffter.

avrundingsteil av første typen

Eksempel uten avrundingsteil:

$a = 0.2$, $b = 0.1 \rightarrow 0.3$

Eksempel $a = 10/7$, $b = -1.42$

Adder på normalform, 4 bits for signifikanden)

Løsning $a = 1.42857\dots$ $b = -1.42$

a er størst

a på normalform: $0.1429 \cdot 10^1$

$b = -0.1420 \cdot 10^1$

steg 2: $\gamma = \alpha + \beta = 0.1429 - 0.1420 = 0.0009$

steg 3: $0.0009 \cdot 10^1 = 0.009 = 0.9 \cdot 10^{-2}$

riktig svar: $\frac{10}{7} - 1.42 = 0.8571\dots \cdot 10^{-2}$

Kun ett siffer er riktig i svaret, så stor avrundingsfeil.

Eneste problem: Avrundning av $10/7$ i starten.

Oppgaver kap. 4: 4.1: 1ac, 2
4.2: 1, 2, 4, 5abc.