# Differensligninger (kap. 4 i Kalkulus)

En differensligning er en ligning på formen

$$x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = 0$$

Følgen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (eller $x_0, x_1, \ldots$) er ukjent.

Hvis vi vet $x_0$ og $x_1$, så kan $x_2, x_3, x_4, \ldots$ bestemmes ved

$$x_{n+2} = -b\,x_{n+1} - c\,x_n$$

Vi sier at $x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = 0$ er

- homogen (0 på høyresiden)
- av andre orden (tre ledd involvert)
- lineær (ingen kryssledd)

**Eksempel 1:** Harer som formerer seg:

- starter å formere seg etter to måneder
- får et nytt par harer hver måned
- aldri dør

Hvordan vil harebestanden vokse?

**Løsning:** La $x_n$ være antall par harer etter n måneder.

Da er

$$x_{n+2} = \#\text{ mer enn 1 måned gamle} + \#\text{ nyfødte}$$

$$= x_{n+1} + \underbrace{x_n}_{\text{mer enn 2 mnd gamle, formerer seg.}}$$

I boka: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Dette kalles også for startbetingelser

# Løsning av 2. ordens, lineære, homogene differensligninger

La $x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$ være gitt, og anta at den karakteristiske ligningen $r^2 + br + c = 0$ har to forskjellige reelle røtter $r_1$ og $r_2$.

Løsningen til differensligningen er nøyaktig de følger som kan skrives på formen

$$(*) \qquad x_n = C r_1^n + D r_2^n \qquad (C \text{ og } D \text{ konstanter})$$

Bevis en vei: Vi viser at (*) faktisk er en løsning:

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = C r_1^{n+2} + D r_2^{n+2} + b(C r_1^{n+1} + D r_2^{n+1}) + c(C r_1^n + D r_2^n)$$

$$= C(r_1^{n+2} + b r_1^{n+1} + c r_1^n) + D(r_2^{n+2} + b r_2^{n+1} + c r_2^n)$$

$$= C r_1^n (r_1^2 + b r_1 + c) + D r_2^n (r_2^2 + b r_2 + c)$$

$$= C r_1^n \cdot 0 + D r_2^n \cdot 0 = 0 \quad \blacksquare$$

Eksempel: Vi bruker dette for harebestanden:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \qquad x_0 = 0,\ x_1 = 1 \ (\Rightarrow x_2 = 1)$$

$$\Updownarrow$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0 \qquad x_0 = 0,\ x_1 = 1 \ (\Rightarrow x_2 = 1)$$

karakteristisk ligning: $r^2 - r - 1 = 0$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \begin{pmatrix} r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Vi fikk altså to forskjellige røtter, slik at generell løsning er

$$x_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$x_0 = 0: \quad C + D = 0 \quad \Rightarrow D = -C$

$x_1 = 1: \quad C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$$\Downarrow$$

$$C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = C\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}C = 1$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad D = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

(Kalles også for en spesiell løsning / partikulær løsning)

## Måling av feil (kap.5 i kompendiet)

Anta $\tilde{a}$ er en tilnærming til $a$ (feks. kan $\tilde{a}$ være beste tilnærming til $a$ med flyttall).

To måter å måle feilen mellom $a$ og $\tilde{a}$:

1. Absolutt feil $|\tilde{a} - a|$
2. Relativ feil $\frac{|\tilde{a} - a|}{|a|}$ (anta $a \neq 0$)

Eksempel: Anta du investerer $a$ kroner, og at du får en avkastning på 100 kroner etter ett år.

$$a \xrightarrow{1 \text{ år etter}} \underbrace{a + 100}_{\tilde{a}}$$

$\overbrace{\text{Absolutt}}^{\text{vekst}}$ feil : $|(a+100) - a| = 100$

Hvis $a$ var $\begin{cases} \text{liten: veldig bra} \\ \text{stor: veldig dårlig} \end{cases}$ absolutt feil samme uansett, sier lite.

Relativ feil: $\left|\frac{(a+100)-a}{a}\right| = \frac{100}{a} =$ andel avkastning

Så: relativ feil sier noe om prosentvis avkastning.

Observasjon: Hvis $\tilde{a}$ er flyttallsrepresentasjonen av $a$.

Da er $\left|\frac{\tilde{a}-a}{a}\right| \approx 10^{-16}$

(antar her 64 bits flyttall)

Hvorfor? La

$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha \cdot 10^{n} \\ \tilde{a} &= \tilde{\alpha} \cdot 10^{n} \end{aligned}\right\} \frac{1}{10} \leq \alpha, \tilde{\alpha} < 1$$

$\underbrace{\hphantom{\tilde{a} = \tilde{\alpha} \cdot 10^{n}}}_{\text{normalform}}$

Vi vet at ca. 16 signifikante sifre stemmer overens i $a$ og $\tilde{a}$, slik at $|\tilde{\alpha}-\alpha| \approx 0.5 \times 10^{-16}$

$$\Rightarrow \left|\frac{\tilde{a}-a}{a}\right| = \left|\frac{\tilde{\alpha}10^{n} - \alpha 10^{n}}{\alpha 10^{n}}\right| = \left|\frac{\tilde{\alpha}-\alpha}{\alpha}\right| \overset{\alpha \geq \frac{1}{10}}{\leq} \left|\frac{\tilde{\alpha}-\alpha}{\frac{1}{10}}\right|$$

$$\approx 10 \cdot 0.5 \times 10^{-16}$$

$$= 5 \times 10^{-16} \quad \blacksquare$$

Forbinder sifre som stemmer overens med relativ feil.

Mer generelt:

Observasjon 5.20

$$\left|\frac{a-\tilde{a}}{a}\right| \approx 10^{-m}$$

$$\Updownarrow$$

"omtrent" de første $m$ signifikante sifrene i $a$ og $\tilde{a}$ stemmer overens stor relativ feil $\longleftrightarrow$ liten $m'$ $\longleftrightarrow$ få sifre stemmer overens.

## Feil ved regneoperasjoner

La $a \in \mathbb{R}$, $\tilde{a}$ tilnærming til $a$ med 64 bits flyttall.

relativ feil: $\quad \delta = \dfrac{\tilde{a} - a}{a}$

Da er:
$$a\delta = \tilde{a} - a$$
$$a + a\delta = \tilde{a}$$
$$\tilde{a} = a(1+\delta)$$

**Multiplikasjon:**

$$\tilde{a} = a(1+\delta_1) \quad , \quad \tilde{b} = b(1+\delta_2)$$

Hva er relativ feil mellom $ab$ og $\tilde{a}\tilde{b}$ ?

$$\tilde{a}\tilde{b} = ab(1+\delta_1)(1+\delta_2)$$
$$= ab(1+\delta_1+\delta_2+\underbrace{\delta_1\delta_2}_{\approx 10^{-32},\ \text{liten i forhold til } \delta_1, \delta_2})$$
$$\approx ab(1+\delta_1+\delta_2)$$

$$\left|\frac{\tilde{a}\tilde{b} - ab}{ab}\right| \approx \left|\frac{ab(1+\delta_1+\delta_2) - ab}{ab}\right| = |1+\delta_1+\delta_2-1| = |\delta_1+\delta_2|$$
$$\leq |\delta_1| + |\delta_2|.$$

Relativ feil blir med andre ord ikke mer enn fordoblet.

**Divisjon:**

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{a(1+\delta_1)}{b(1+\delta_2)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(1+\delta_1)(1-\delta_2)}{(1+\delta_2)(1-\delta_2)}$$
$$= \frac{a}{b}\,\frac{1+\delta_1-\delta_2+\delta_1\delta_2}{1-\delta_2^2}$$
$$\approx \frac{a}{b}\,\frac{1+\delta_1-\delta_2}{1}$$

**Relativ feil:**
$$\left|\frac{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b}}\right| = \left|\frac{\frac{a}{b}(1+\delta_1-\delta_2) - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b}}\right| = |1+\delta_1-\delta_2-1|$$

$$= |\delta_1 - \delta_2| \leq |\delta_1| + |\delta_2|$$

Igjen, feilen blir ikke mer enn fordoblet.