Fra sist: Avrundingsfeil ved multiplikasjon/divisjon

Addisjon: La a, b være representert ved $\tilde{a}, \tilde{b}$

(64 bits flyttall s.a. relativ feil $\left|\frac{\tilde{a}-a}{a}\right|, \left|\frac{\tilde{b}-b}{b}\right| \approx 10^{-16}$

Vi fant

$$\tilde{a} = a(1+\delta_1), \quad \tilde{b} = b(1+\delta_2),$$

der δ_1, δ_2 relative feil $\approx 10^{-16}$.

$$\tilde{a} + \tilde{b} = a(1+\delta_1) + b(1+\delta_2) = a+b + a\delta_1 + b\delta_2$$

$$(\tilde{a}+\tilde{b}) - (a+b) = a\delta_1 + b\delta_2$$

relativ feil: $\left|\frac{(\tilde{a}+\tilde{b})-(a+b)}{a+b}\right| = \left|\frac{a\delta_1 + b\delta_2}{a+b}\right| \leq \frac{|a\delta_1| + |b\delta_2|}{|a+b|}$

kan bli stor hvis: 1) a eller b veldig stor.
2) $a+b$ veldig liten

Samme problem i subtraksjon:

Når vi regner ut $a-b$ så kan vi miste mange signifikante sifre hvis a og b er store, og $a-b \approx 0$.
Dette kalles <u>kansellering</u>

Omskriving av formler for å unngå kansellering.

Eksempel 1: Vi skal regne ut $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$, der x er stor og positiv.

Når x er stor, så er $\sqrt{x^2+1}-x \approx 0$, slik at vi får problemer med kansellering.

Vi skriver om: $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x^2+1)-x^2} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{1} = \sqrt{x^2+1}+x.$

I dette uttrykket får vi ikke problemer med kansellering.

Eksempel 2: Røttene til $ax^2 + bx + c = 0$ er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hvis $b > 0$, og b er stor (mye større enn a og c), så får vi problemer med kansellering i

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vi kan skrive om:

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{-2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}$$

$$= \frac{4ac}{-2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}$$

$$= -\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

som ikke har problemer med kansellering for $b > 0$, b stor.

Oppgaver kap. 5: 5.2: 1, 2, 4, 6ade, 9
5.3: 1, 2, 3, 4, 6
5.4: 16, 2

Noen oppgaver fra kap. 5 (kompendiet)

5.2.3 (d): $\underbrace{\text{runde av}}^{\text{Til 3 sifre}}$: $10.473 \longrightarrow 10.5$

(e): $\underbrace{\text{trunkere}}^{\text{Til 3 sifre}}$: $10.473 \longrightarrow 10.4$

5.2.6 (b): Regn ut $9{,}834 + 2.45$ når vi bruker 4 sifre for signifikanden, et for eksponenten.

Løsning: $9.834 = 0.9834 \times 10^1$

$2.45 = 0.2450 \times 10^1$

$$\begin{array}{r} 0.9834 \\ +\ 0.2450 \\ \hline 1{,}2284 \end{array}$$

$$1.2284 \cdot 10^1 = 0.12284 \cdot 10^2 \xrightarrow{\text{runder}} 0.1228 \cdot 10^2 = 12.28$$

Kap. 4: Kalkulus forts (Differensligninger)

Setning 4.1.5, andre vei:

Hvis $r^2 + br + c$ har to forskjellige reelle røtter r_1 og r_2, og x_n løser $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$, så finnes C, D, slik at $x_n = Cr_1^n + Dr_2^n$

Bevis: Lemma 4.1.3: $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$ har nøyaktig en løsning som tilfredsstiller $x_0 = b_0$, $x_1 = b_1$ (siden $x_{n+2} = -bx_{n+1} - cx_n$)

Det er derfor nok å vise at det finnes C, D, slik at

$x_0 = b_0$: $\quad C r_1^0 + D r_2^0 = b_0$ $\qquad C + D = b_0$

$x_1 = b_1$: $\quad C r_1^1 + D r_2^1 = b_1$ $\qquad C r_1 + D r_2 = b_1$

Disse ligningene har en løsning: $\qquad D = b_0 - C$

$$C r_1 + (b_0 - C) r_2 = b_1$$
$$\Downarrow$$
$$C(r_1 - r_2) = b_1 - b_0 r_2$$
$$\Downarrow$$
$$C = \frac{b_1 - b_0 r_2}{r_1 - r_2}$$
$$D = b_0 - C$$

Vi fant derfor en unik løsning på formen $x_n = C r_1^n + D r_2^n$, med $x_0 = b_0$, $x_1 = b_1$ ■

For $x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$ er det tre muligheter:

$r^2 + br + c = 0$ har
1. To forskjellige reelle røtter
2. To like reelle røtter
3. Komplekse røtter

2. To like reelle røtter:

Jeg påstår at den generelle løsningen er
$$x_n = C r_1^n + D n r_1^n,$$
der r_1 er roten i $r^2 + br + c = 0$.

Vi sjekker først at $x_n = C r_1^n$ er en løsning:

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = C r_1^{n+2} + b C r_1^{n+1} + c C r_1^n$$
$$= C r_1^n (r_1^2 + b r_1 + c) = C r_1^n \cdot 0 = 0$$

Vi sjekker at $x_n = Dnr_1^n$ er en løsning :

Husk at $r^2+br+c = (r-r_1)^2 = r^2 \underbrace{-2r_1}_{b} r + \underbrace{r_1^2}_{c}$

$$x_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n = x_{n+2} - 2r_1 x_{n+1} + r_1^2 x_n$$
$$= D(n+2)r_1^{n+2} - 2Dr_1(n+1)r_1^{n+1} + Dr_1^2 n r_1^n$$
$$= Dr_1^{n+2}\left((n+2)-2(n+1)+n\right)$$
$$= Dr_1^{n+2}\cdot 0 = 0$$

Det følger at $x_n = Cr_1^n + Dnr_1^n$ løser $x_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n=0$

Finnes det C, D, slik at $x_n = Cr_1^n + Dnr_1^n$ løser $x_0 = b_0$, $x_1 = b_1$?

Vi får

$n=0$: $\quad C\cdot r_1^0 + D\cdot 0\cdot r_1^0 = C \quad = b_0$

$n=1$: $\quad C\cdot r_1^1 + D\cdot 1\cdot r_1^1 = (C+D)r_1 \quad = b_1$

$$Dr_1 = b_1 - Cr_1$$
$$\Rightarrow D = \frac{b_1 - Cr_1}{r_1}$$

($r_1 = 0$ svarer til $b=c=0$, dvs differensligningen

$$x_{n+2} = 0$$

3. Komplekse røtter (disse må være konjugerte av hverandre).

La røttene til $r^2+br+c=0$ være r og $\bar{r}$

Da er den generelle reelle løsningen $\underbrace{x_n}_{\text{reell}} = \underbrace{Cr^n + \bar{C}\,\bar{r}^n}_{a+\bar{a}\ \text{reell}}$

(C er her et komplekst tall)

Viser at disse er løsninger:

$$X_{n+2} + bX_{n+1} + cX_n = \underline{Cr^{n+2}} + \underline{\underline{\bar{C}\bar{r}^{n+2}}} + b(\underline{Cr^{n+1}} + \underline{\underline{\bar{C}\bar{r}^{n+1}}}) + c(\underline{Cr^n} + \underline{\underline{\bar{C}\bar{r}^n}})$$

$$= C(r^{n+2} + br^{n+1} + cr^n) + \bar{C}(\bar{r}^{n+2} + b\bar{r}^{n+1} + c\bar{r}^n)$$

$$= Cr^n(r^2 + br + c) + \bar{C}\bar{r}^n(\bar{r}^2 + b\bar{r} + c)$$

$$= Cr^n \cdot 0 + \bar{C}\bar{r}^n \cdot 0 = 0$$

Bedre måte å uttrykke X_n på:

Sett $C = A + iB$, $\underbrace{r = \rho e^{i\theta}}_{\text{polarform}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \rho : \text{modulus} \\ \theta : \text{argument.} \end{array} \right.$

$$\rightarrow r^n = \rho^n e^{in\theta} \qquad \bar{r} = \rho e^{-i\theta}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$\cos\theta = \cos(-\theta)$$
$$\sin\theta = -\sin(-\theta)$$

$$X_n = Cr^n + \bar{C}\bar{r}^n$$

$$= (A+iB)\rho^n e^{in\theta} + (A-iB)\rho^n e^{-in\theta}$$

$$= \rho^n\big((A+iB)(\cos n\theta + i\sin n\theta) + (A-iB)(\cos n\theta - i\sin n\theta)\big)$$

$= \ldots$ (8 ledd som forenkles)

$$= \rho^n(\underbrace{2A}_{E}\cos n\theta \underbrace{- 2B}_{F}\sin n\theta)$$

$$= E\rho^n\cos(n\theta) + F\rho^n\sin(n\theta)$$