Eksempel 4.1.17 (To forskjellige reelle røtter)

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 0 \quad , x_0 = 1 , x_1 = -2$$

Løsning: $r^2 - 5r + 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$

$\Rightarrow r_1 = 4 , \quad r_2 = 1$

Generell løsning: $x_n = C4^n + D$

$x_0 = 1 :\quad C + D = 1 \Rightarrow D = 1 - C$

$x_1 = -2 :\quad \underbrace{4C + D = -2}$

$4C + 1 - C = -2$

$3C = -3$

$C = -1 \quad \Rightarrow D = 2$

Løsning: $x_n = -4^n + 2 = \underline{\underline{2 - 4^n}}$

Eksempel 4.1.11 (dobbelrot)

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0 \quad , x_0 = 1 , x_1 = 8$$

Løsning: $r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$\Rightarrow r_1 = r_2 = 2$

Generell løsning: $x_n = C2^n + Dn2^n$

$x_0 = 1 :\quad C + 0 = 1$

$x_1 = 8 :\quad \underbrace{2C + 2D = 8}$

$2 + 2D = 8$

$2D = 6$

$D = 3$

Løsning: $x_n = 2^n + 3n2^n = \underline{2^n(1+3n)}$

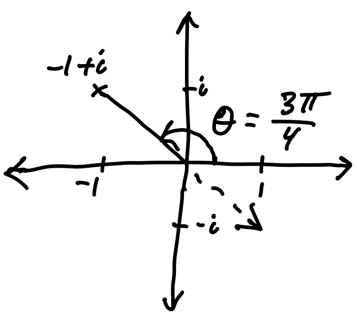
Eksempel 4.1.12 (komplekse røtter)

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0 \quad , \quad x_0 = 1 \, , \, x_1 = 2$$

Løsning:

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$$



$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\text{imag. del}}{\text{rel. del}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \arctan(-1)$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

(husk at tan. har periode π: $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

Det følger at $\quad -1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\underbrace{3\pi/4}_{\theta}}$

Generell løsning: $\quad x_n = E(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n3\pi}{4}\right) + F(\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n3\pi}{4}\right)$

$$x_0 = 1 : \quad E\cos 0 + F \sin 0 = E = 1$$

$$x_1 = 2 : \quad E\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4} + F\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4} = 2$$

$$E\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + F\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

$$-1 + F = 2$$

$$F = 3$$

$$(\sqrt{2})^n = (2^{\frac{1}{2}})^n = 2^{n/2}$$

Løsning: $\underline{x_n = 2^{n/2}\cos\frac{3\pi n}{4} + 3\cdot 2^{n/2}\sin\frac{3\pi n}{4}}$

Andre formen for løsningen:

$$x_n = C r_1^n + \bar{C}\bar{r}_1^n = C(-1+i)^n + \bar{C}(-1-i)^n$$

$x_0 = 1: \quad C + \bar{C} = 1 \quad \big\downarrow \cdot(-1+i)$

$x_1 = 2: \quad C(-1+i) + \bar{C}(-1-i) = 2$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\bar{C}(-1-i) - \bar{C}(-1+i)} = 2 - (-1+i)\cdot 1 = 3 - i$$

$$\cancel{-\bar{C}} - i\bar{C} + \cancel{\bar{C}} - i\bar{C} = \underbrace{-2i\bar{C} = 3 - i} \Rightarrow 2\bar{C} = 3i + 1$$

$$\bar{C} = \frac{1+3i}{2} \Rightarrow C = \frac{1-3i}{2}$$

$$x_n = \frac{1-3i}{2}(-1+i)^n + \frac{1+3i}{2}(-1-i)^n$$

Oppgaver fra sek. 4.1 i Kalkulus:
1ab, 3ab, 5ab, 9, 13, 14, 15

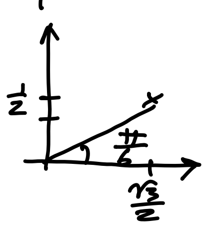
Oppgave 4.1.14 $\quad x_n$: avvik fra middeltemperatur i måned n:

$$x_{n+2} - \sqrt{3}\, x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_1 = -12, \ x_3 = -6$$

Når er det kaldest/varmest?

Løsning: $\quad r^2 - \sqrt{3}\, r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2} i$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$



ser at $\theta = \frac{\pi}{6}$ for $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

(alternativt: $\arctan \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow r_1 = \rho e^{i\theta} = e^{\frac{\pi}{6} i}$$

Generell løsning: $\quad x_n = E \cos \frac{n\pi}{6} + F \sin \frac{n\pi}{6}$.

$x_1 = -12$: $E\cos\frac{\pi}{6} + F\sin\frac{\pi}{6} = -12$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{2}E + \frac{1}{2}F = -12$

$x_3 = -6$: $E\cos\frac{\pi}{2} + F\sin\frac{\pi}{2} = -6$ $\quad F = -6$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}E - 3 = -12$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}E = -9$$

$$E = \frac{-18}{\sqrt{3}} = \underline{-6\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_n = -6\sqrt{3}\cos\frac{n\pi}{6} - 6\sin\frac{n\pi}{6}}}$$

Når er størst/minst ?

Se på $f(x) = -6\sqrt{3}\cos x - 6\sin x$ (så, $x = \frac{n\pi}{6}$)

$$f'(x) = 6\sqrt{3}\sin x - 6\cos x = 0 \ :$$

$$6\sqrt{3}\sin x = 6\cos x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\Downarrow$$

$$n = 1 + 6k$$

Med andre ord: Størst/minst temp. inntreffer etter $1+6k$ måneder.

$n = 1$: $x_1 = -12$

$n = 7$: $-6\sqrt{3}\cos\frac{7\pi}{6} - 6\sin\frac{7\pi}{6} = -6\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 6\left(\frac{1}{2}\right) = 12$

$n = 13$: $x_{13} = -12$

$n = 19$: $x_{19} = 12$

Merk: Det vi har gjort kan også overføres til første ordens ligninger:

Eksempel Vi har 1000 kroner, og setter de i banken til 2% rente. Hvor mye har vi etter n år?

Løsning: La x_n være beløpet etter n år. Da er

$$x_{n+1} = x_n + \underbrace{0.02\,x_n}_{\text{rente}} = 1.02\,x_n$$

$$x_{n+1} - 1.02\,x_n = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{homogen} \\ \text{første orden} \\ \text{lineær} \end{array} \right.$$

Karakteristisk ligning: $r - 1.02 = 0$,

som har løsning $r = 1.02$.

Løsning: $x_n = C r^n$.

Med initialbetingelsen $x_0 = 1000$:

$$1000 = C \cdot (1.02)^0 \Rightarrow C = 1000$$

Løsning: $\underline{\underline{x_n = 1000 \cdot (1.02)^n}}$