Inhomogene differensligninger (sek 4.2 i kalkulus)

Disse har høyreside $\neq 0$:

(*): 2. ordens: $x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f(n)$

1. ordens: $x_{n+1} + r x_n = f(n)$

lineære, inhomogene

Lemma: Hvis x_n^p løser (*), så er alle andre løsninger av (*) på formen

$$x_n = x_n^p + x_n^h ,$$

partikulær løsning

homogen løsning

der x_n^h er en vilkårlig løsning av den homogene ligningen (der $f(n)=0$)

Eksempel Igjen 1000 kroner, settes i banken til 2% rente. I tillegg skal vi ta ut 100 kroner hvert år. Hvor mye har vi igjen etter n år? Når går vi tom for penger?

Løsning: x_n: fremdeles beløp etter n år. Da er

$$x_{n+1} = x_n + \underbrace{0.02 x_n}_{\text{rente}} \underbrace{-100}_{\text{uttak}} = 1.02 x_n - 100 , \quad x_0 = 1000$$

$$x_{n+1} - 1.02 x_n = -100$$

x_n^h: Løsning av $x_{n+1} - 1.02 x_n = 0 \Rightarrow x_n^h = C\, 1.02^n$

x_n^p: Skal løse $x_{n+1} - 1.02 x_n = -100$

siden høyresiden er konstant : prøv x_n^p $\underbrace{\text{konstant}}_{A}$:

$x_n^p = A$:

$$A - 1.02A = -100$$
$$-0.02A = -100$$
$$A = 5\,000$$

Derfor $x_n^p = 5000$

Derfor er $x_n = x_n^p + x_n^h = 5000 + C \cdot 1.02^n$

$x_0 = 1000 \Rightarrow 1000 = 5000 + C \Rightarrow C = -4000$

Derfor er løsningen: $x_n = 5000 - 4000 \cdot 1.02^n$

Tom for penger når $x_n = 0$:

$$5000 - 4000 \cdot 1.02^n = 0$$
$$1.02^n = \frac{5}{4} \Rightarrow n \ln 1.02 = \ln 1.25$$
$$\Rightarrow n = \frac{\ln 1.25}{\ln 1.02} \approx 11.27 \text{ (år)}$$

Bevis for lemma:

La x_n^p løse $(*)$, og x_n en annen løsning av $(*)$

Da er det klart at $x_n^h = x_n - x_n^p$ løser den homogene ligningen. Det følger at

$$x_n = x_n^h + x_n^p \quad \blacksquare$$

Hvordan finne x_n^p for mer kompliserte høyresider $f(n)$

Generell regel: For å løse $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f(n)$, finn en x_n^p som har "samme form" som $f(n)$.

Tommelfingerregel 1: Hvis $f(n)$ er et polynom, prøv x_n^p som et polynom av samme grad.

Eksempel 4.2.2: $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = -6n+1$, $x_0=1, x_1=4$

Løsning: Vi prøver $x_n^p = An + B$:

$$\underbrace{A(n+2)+B}_{x_{n+2}} - (\underbrace{A(n+1)+B}_{x_{n+1}}) - 6(\underbrace{An+B}_{x_n}) = -6n+1$$

$$n(A - A - 6A) + 2A + B - A - B - 6B = -6n+1$$

$$-6An \qquad + (A - 6B) \qquad = -6n+1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -6A &= -6 \\ A-6B &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &A = 1 \\ &1-6B = 1 \Rightarrow B = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_n^p = n$ er en partikulær løsning.

Homogen løsning: $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0$

$$r^2 - r - 6 = 0 \Rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\Rightarrow r_1 = 3 \,,\, r_2 = -2$$

$$x_n^h = C(-2)^n + D3^n$$

Generell løsning (av inhomogene):

$$x_n = x_n^h + x_n^p = \underline{C(-2)^n + D3^n + n}$$

Initialverdier: $x_0 = 1$: $\quad C + D + 0 = 1$

$x_1 = 4$: $\quad -2C + 3D + 1 = 4$

$$\left.\begin{aligned} C+D &= 1 \\ 1-2C+3D &= 4 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &D = 1-C \\ &1-2C+3(1-C) = -5C+4 = 4 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow D = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{x_n = 3^n + n}$$

Tommelfingerregel 2:

Hvis $f(n)$ er en potens: prøv x_n^p = potens med samme grunntall.

Mer generelt:

Hvis $f(n) = a^n P(n)$: Prøv $x_n^p = a^n Q(n)$,
der Q er et polynom av samme grad som P.

(hvis a er en rot i den karakteristiske ligningen:
øk graden til Q med 1)

Eksempel: $x_{n+1} - 2x_n = 1 \cdot 2^n$

Vi skal da prøve $x_n^p = A 2^n$:

$$A 2^{n+1} - 2A2^n = 2A2^n - 2A2^n = 0,$$

så vi finner ingen slik løsning.

(her er $a = 2$, som er rot i $r - 2 = 0$).

dropp konstant ledd

Vi øker graden til Q med 1: $x_n^p = An2^n$:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - 2x_n &= 2^n \quad : \\
A(n+1)2^{n+1} - 2An2^n &= 2^n \\
2A(n+1) - 2An &= 1 \\
\cancel{2An} + 2A - \cancel{2An} &= 1 \\
2A &= 1 \quad \Rightarrow \quad A = \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow x_n^p = \frac{1}{2} n 2^n$ er en partikulær løsning.

Homogen løsning: $x_{n+1} - 2x_n = 0 \Rightarrow x_n^h = C \cdot 2^n$
$r - 2 = 0$

Generell løsning: $x_n = x_n^p + x_n^h = \underline{\underline{\frac{1}{2} n 2^n + C \cdot 2^n}}$

Eksempel: Vi kan måtte gå opp en grad også for polynomer (når 1 er en rot i den karakteristiske ligningen).

Eksempel 4.2.5 $x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = n-3$

kar. ligning: $r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$\Rightarrow r_1 = -2, \quad r_2 = 1.$

gjetter vi $x_n^p = An + B$, så vil vi mislykkes:

$$\begin{aligned} x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n &= A(n+2) + B + A(n+1) + B - 2(An+B) \\ &= n(A + A - 2A) + 2A + B + A + B - 2B \\ &= 3A \\ &= n - 3, \end{aligned}$$

som er umulig

dropp konstantledd.

Vi gjetter istedet $x_n^p = An^2 + Bn$

$x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n =$

$A(n+2)^2 + B(n+2) + A(n+1)^2 + B(n+1) - 2(An^2 + Bn) =$

$(A + A - 2A)n^2 + (4A + B + 2A + B - 2B)n + 4A + 2B + A + B =$

$6An + 5A + 3B =$

Dette blir lik $n-3$ hvis: $\quad n - 3$

$$\left.\begin{aligned} 6A &= 1 \\ 5A + 3B &= -3 \end{aligned}\right\} \text{ gir } A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{23}{18}, \text{ slik at}$$

$x_n^p = An^2 + Bn = \frac{1}{6}n^2 - \frac{23}{18}n$ er en partikulærløsning

Tommelfingerregel 3:

Hvis $f(n) = b^n(A\sin(an) + B\cos(an))$, prøv

$$x_n^p = b^n(C\sin(an) + D\cos(an))$$

Noen ganger må vi gå opp en grad ($b^n \to Anb^n$)

Eksempel: $x_{n+1} - x_n = \sin(\frac{\pi}{2}n)$

Løsning: Vi prøver $x_n^p = C\sin(\frac{\pi}{2}n) + D\cos(\frac{\pi}{2}n)$

$$\sin(\tfrac{\pi}{2}n + \tfrac{\pi}{2}) \;\; \text{"} \;\; \sin\tfrac{\pi}{2}n\cos\tfrac{\pi}{2} + \cos\tfrac{\pi}{2}n\sin\tfrac{\pi}{2}$$

$$C\sin(\tfrac{\pi}{2}(n+1)) + D\cos(\tfrac{\pi}{2}(n+1)) - C\sin\tfrac{\pi}{2}n - D\cos\tfrac{\pi}{2}n$$

$$= C\cos(\tfrac{\pi}{2}n) - D\sin\tfrac{\pi}{2}n - C\sin\tfrac{\pi}{2}n - D\cos\tfrac{\pi}{2}n$$

$$= (-C-D)\sin(\tfrac{\pi}{2}n) + (C-D)\cos\tfrac{\pi}{2}n$$

Dette er lik $\sin\frac{\pi}{2}n$ når

$$\left.\begin{array}{l} -C-D = 1 \\ C-D = 0 \end{array}\right\} \quad C = D = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_n^p = -\frac{1}{2}\sin(\tfrac{\pi}{2}n) - \frac{1}{2}\cos(\tfrac{\pi}{2}n)$$

Oppgaver fra seksjon 4.2: 1a, 5ab, 18, 21, 23.