MAT-INF 1100 3/10

Taylorapproksimasjon

Gitt en funksjon $f(x)$, ønsker vi å approksimere f om et punkt $a \in \mathbb{R}$ med et polynom $P_n(x)$ av grad $\leq n$.

Motivasjon

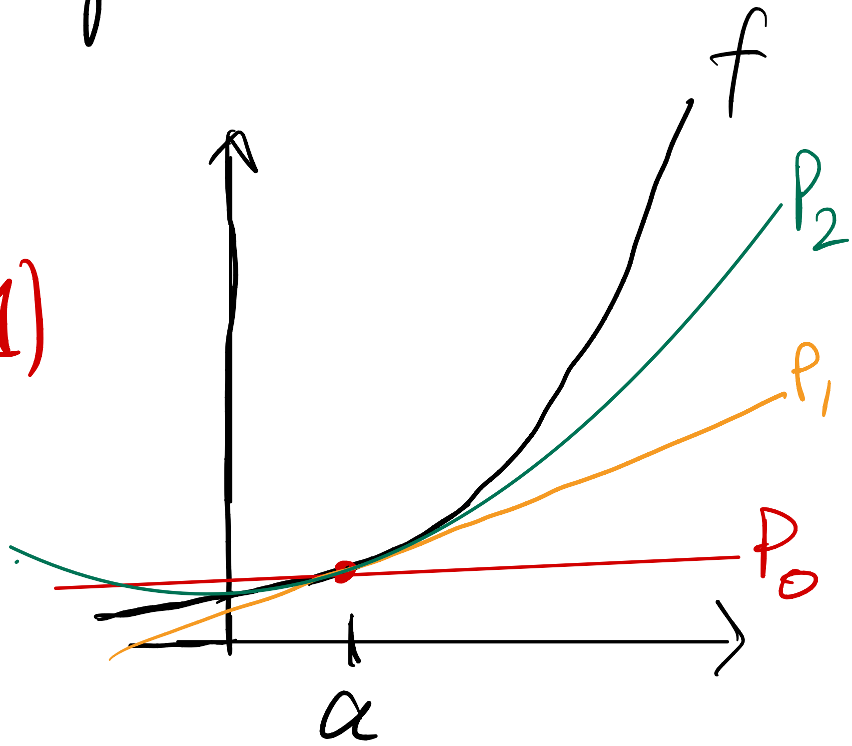
- Generalisering av tangenten til f i a
- Kan approksimere funksjoner som ikke kan beregnes eksakt, som e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$ ...
- Kan brukes i videre approksimasjoner:

$$\int f(x)\,dx \approx \int P_n(x)\,dx.$$

Framgangsmåte

Vi antar at f er glatt nok i nærheten av punktet a (dvs $f', f'', \dots, f^{(n)}$ er kontinuerlig for så mange deriverte som vi trenger), og vi setter

$$\left.\begin{aligned} P_n(a) &= f(a) \\ P_n'(a) &= f'(a) \\ P_n''(a) &= f''(a) \\ &\ \vdots \\ P_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$



[Er det mulig å oppfylle (1) for enhver $n \geq 0$?]

$\boxed{n=0}$ P_0 er konstant; $P_0(x) = f(a)$

$\boxed{n=1}$ $P_1(x) = b_0 + b_1 x$. Bedre å bruke formen (for å løse (1))

$$P_1(x) = c_0 + c_1(x-a) \quad (2)$$

Fra (1) ønsker vi $\left.\begin{aligned} P_1(a) &= f(a) \\ P_1'(a) &= f'(a) \end{aligned}\right\}$ $\Rightarrow$ $\begin{aligned} c_0 &= f(a) \\ c_1 &= f'(a) \end{aligned}$

og (2) gir $\begin{aligned} P_1(a) &= c_0 \\ P_1'(a) &= c_1 \end{aligned}$

$$\Rightarrow P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$\boxed{n=2}$ Vi skriver

$$P_2(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad P_2'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) \Rightarrow P_2'(a) = c_1$$

$$\& \ P_2''(x) = 2c_2.$$

Fra (1) ønsker vi

$$\begin{aligned} P_2(a) &= f(a) \\ P_2'(a) &= f'(a) \\ P_2''(a) &= f''(a) \end{aligned}$$

og (3) gir

$$\begin{aligned} P_2(a) &= c_0 \\ P_2'(a) &= c_1 \\ P_2''(a) &= 2c_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2}$$

Som gir

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

$\boxed{\text{Generell } n}$ Vi skriver

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$$
$$= \sum_{j=0}^{n} c_j (x-a)^j \qquad (4)$$

Merk at $P_n(a) = c_0$

$$P_n'(x) = \sum_{j=1}^{n} j\, c_j (x-a)^{j-1} \Rightarrow P_n'(a) = c_1$$

$$P_n''(x) = \sum_{j=2}^{n} j(j-1)\, c_j (x-a)^{j-2} \Rightarrow P_n''(a) = 2c_2$$

$\vdots$

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n} j(j-1)\cdots(j-k+1)\, c_j (x-a)^{j-k}$$
$$= \sum_{j=k}^{n} \frac{j!}{(j-k)!} c_j (x-a)^{j-k}$$
$$= k!\, c_k + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{j!}{(j-k)!} c_j (x-a)^{j-k}$$

$$\Rightarrow P_n^{(k)}(a) = k!\, c_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Og fra (1) ønsker vi

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad \text{og}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

(Husk at $0! = 1$.)

<u>Def</u> Taylorpolynomet til f av grad n om punktet a er gitt ved

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

(punktet a er underforstått i notasjonen og merk at $\text{grad}(T_n f) \leq n$).

Eksempel $\quad f(x) = e^x$

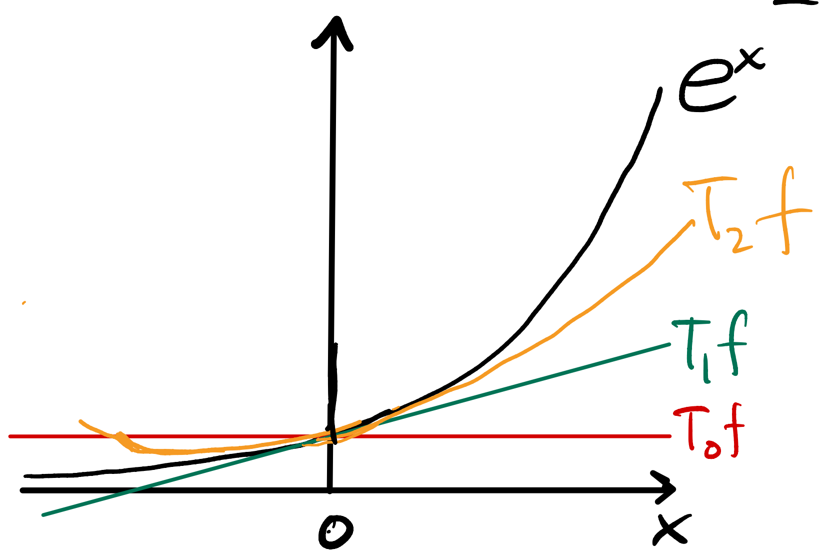
Finn Taylorpolynomet til f av grad n om $a = 0$.

$f(x) = e^x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = e^x$	$f'(0) = 1$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = e^x$	$f^{(n)}(0) = 1$

$$\Rightarrow T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

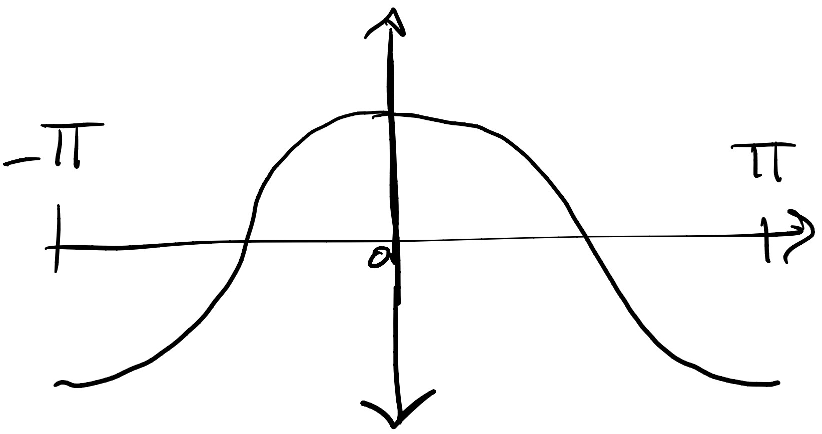
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$



Eksempel

$f(x) = \cos(x)$ og $a = 0$.



$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(x) & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= -\sin(x) & f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= -\cos(x) & f''(0) &= -1 \\
f^{(3)}(x) &= \sin(x) & f^{(3)}(0) &= 0 \\
f^{(4)}(x) &= \cos(x) & f^{(4)}(0) &= 1 \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} f^{(2k+1)}(0) &= 0 \\ f^{(2k)}(0) &= (-1)^k \end{aligned}\right\} \forall\ k \geq 0$$

$$\Rightarrow T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k$$

$$= \frac{1}{0!}x^0 + \frac{0}{1!}x^1 + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

For $n = 2k-1$ (odde) så er

$$T_{2k-1} f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{2(k-1)} \frac{x^{2(k-1)}}{[2(k-1)]!}$$

dvs Taylorpolynomet av grad $2k-1$

$T_{2k-1}(\cos(x))$ er et <u>polynom av grad</u>

<u>$2(k-1)$</u>.

Når $n = 2k$, så er

$$T_{2k} f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

et polynom av grad $2k$.

Taylorpolynomet

$$T_n \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

fås på samme vis.

Konvergens

For en del funksjoner kan det vises at $T_n f \to f$ når $n \to \infty$.

F. eks

$$e^x = T_\infty e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\sin x = T_\infty \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cos x = T_\infty \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

La oss bruke dette til å (formelt) bevise Eulers setning:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Bevis:

$$e^{ix} \overset{\text{formelt}}{=} 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= \cos(x) + i\sin(x) \quad \blacksquare$$